Matematika A3 építőmérnököknek 3. gyakorlat
Konstans együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenletek, próba-függvény-módszer

Konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{1}$$

alakú egyenletet szeretnénk megoldani, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $g(t)$ ismert folytonos függvény.

A megoldás menete két lépésből áll:

1. $ay'' + by' + cy = 0$ homogén egyenlet általános megoldása: $Y_{h,\text{ált}}$
2. (1) egy partikuláris megoldásának meghatározása: y_p

Ezek után (1) általános megoldása: $y = Y_{h,\text{ált}} + y_p$.

A 2. lépésre két módszert tanulunk majd a későbbiekben: próbafüggvény-módszer, illetve konstans variációs módszer (5.heti gyakorlat).

De először 1. lépéssel foglalkozunk.

Homogén rész megoldása

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

egyenlet megoldásának lépései:

(a) Felírjuk a karakterisztikus egyenletet: $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$

(b) Megkeressük a karakterisztikus egyenlet gyökeit: r_1, r_2

(c) Meghatározzuk az általános megoldást:

- Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 \neq r_2$, akkor $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
- Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 = r_2$, akkor $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$
- Ha $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$ és $r_1 = u + iv$ (azaz $r_2 = u - iv$), akkor $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^{ut} \cos(vt) + c_2 e^{ut} \sin(vt)$

1. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + y' - 2y = 0!$$

Majd adjuk meg az $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ kezdeti értékekhez tartozó megoldást!

2. feladat Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet: $y'' + 4y = 0$!

3. feladat

(a) Adja meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását:

$$y'' - 4y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2!$$

(b) Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Próbafüggvény-módszer

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{3}$$

egyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározására akkor tudjuk használni a próbafüggvényt-módszert, ha

$$g(t) = e^{ut} \cdot (A_n(t)\cos(vt) + B_m(t) \cdot \sin(vt))$$

alakú valamilyen $u, v \in \mathbb{R}$-re és A_n, B_m n-ed, illetve m-edfokú polinomra, azaz

$$A_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots a_1 t + a_0,$$

$$B_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \ldots b_1 t + b_0$$

alakúak adott $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots b_m$ együtthatókra.

Legyen $s \in \{0, 1, 2\}$ az $u + iv$ komplex szám multiplicitása a homogén részhez tartozó karakterisztikus egyenletben. Ekkor a partikuláris megoldást

$$y_p = t^s \cdot e^{ut} \cdot (P_k \cdot \cos(vt) + Q_k(t) \cdot \sin(vt))$$

alakban keressük, ahol $k = \max(n, m)$, P_k, Q_k pedig k-adfokú polinomok, azaz

$$P_k(t) = p_k t^k + p_{k-1} t^{k-1} + \ldots p_1 t + p_0,$$

$$Q_k(t) = q_k t^k + q_{k-1} t^{k-1} + \ldots q_1 t + q_0,$$

ahol az ismeretlen együtthatók a (3) egyenletbe való visszahelyettesítésből adódnak.

4. feladat Adott $g(t)$ esetén milyen alakban keressük a partikuláris megoldást? (Tegyük fel, hogy $s = 0$ a példákban.)

(a) $g(t) = 1 + t^2$

(b) $g(t) = e^{3t}(1 - t)$

(c) $g(t) = e^{-2t} \cdot \sin(4t)$

(d) $g(t) = e^t \cdot (\cos(2t) + (1 + t^3) \cdot \sin(2t))$

5. feladat Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}!$$

6. feladat Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet: $y'' + 4y = 3\sin x$!