Matematika A3 építőmérnököknek 4. gyakorlat
Konstans variációs módszer, hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Konstans variációs módszer

Konstans variációs módszerrel

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{1}$$

alakú másodrendű, lineáris (akár változó együtthatós) inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását tudjuk előállítani, ahol g tetszőleges folytonos függvény.

A módszer lépései:

1. Állítsuk elő (1) homogén részének általános megoldását $Y_{h,\text{ált}} = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban.
2. Ekkor a partikuláris megoldást keressük $y_p = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$ alakban (azaz a homogén egyenlet általános megoldásában a c_1, c_2 konstansokat ismeretlen $C_1(t)$, $C_2(t)$ függvényekkel helyettesítjük).
3. Határozzuk meg az ismeretlen függvények deriváltjait ($C_1'(t)$, $C_2'(t)$) az alábbi egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{aligned} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) &= 0 \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) &= g(t) \end{aligned}$$

4. $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ integrálásával megkapjuk $C_1(t)$, $C_2(t)$ függvényeket. Ezekkel felírjuk y_p-t és (1) általános megoldása $y = Y_{h,\text{ált}} + y_p$ lesz.

Megjegyzés: a módszer ugyanarra való, mint próbafüggvény-módszer, de ez általánosabb, hiszen változó együtthatós esetben is működik és nem kell $g(t)$-nek speciális alakúnak lennie. Viszont, ha lehet használni próbafüggvény-módszert, az általában könnyebben számolható.

1. feladat Keressük meg az alábbi egyenlet partikuláris megoldását konstans variációs módszerrel!

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}$$

Megoldásvázlat A 3. gyakorlat 4. feladatában láttuk, hogy a homogén rész általános megoldása

$$Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}.$$

Tehát a partikuláris megoldást $y_p = C_1(t)e^t + C_2 e^{-2t}$ alakban keressük.
A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} C_1' e^t + C_2' e^{-2t} &= 0, \\ C_1' e^t - 2C_2' e^{-2t} &= e^{-t}. \end{aligned}$$

Ebből $C_1' = \frac{1}{3}e^{-2t}$, $C_2' = -\frac{1}{3}e^t$, amiből $C_1 = -\frac{1}{6}e^{-2t}$, $C_2 = -\frac{1}{3}e^t$, azaz $y_p = -\frac{1}{2}e^{-t}$.
Megjegyzés: 3. gyakorlat 4. feladatában ugyanezt kaptuk próbafüggvény-módszerrel.

2. feladat Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet!

$$t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0 \tag{2}$$

Ellenőrizzük le, hogy $Y_1 = t$ és $Y_2 = te^t$ megoldása (2) homogén részének! Adjuk meg az inhomogén egyenlet általános megoldását!

Megoldásvázlat Y_1 és Y_2 visszahelyettesítéssel ellenőrizhető. Mivel ezek nem egymás konstansszorosai a homogén egyenlet általános megoldása: $Y_{h,\text{ált}} = c_1 t + c_2 t e^t$.

(2)-et el kell osztani t^2-tel, hogy y'' együtthatója 1 legyen, így $g(t) = 2t$. Így a megoldandó egyenletrendszer:

$$C_1' t + C_2' t e^t = 0,$$
$$C_1' + C_2'(e^t + te^t) = 2t.$$

Ebből $C_1' = -2$, $C_2' = 2e^{-t}$, amiből $C_1 = -2t$, $C_2 = -2e^{-t}$, azaz $y_p = -2t^2 - 2t$. Itt $-2t$ beolvasztható $c_1 t$ tagba, így az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 t + c_2 t e^t - 2t^2.$$

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Hiányos másodrendű differenciálegyenletről akkor beszélünk, ha x, y és y' közül valamelyik (akár egyszerre több) nem jelenik meg az egyenletben. Három típussal foglalkozunk részletesebben:

1. Ha y és y' is hiányzik: $y'' = f(x)$. Ekkor $y = \int \int f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$.
2. Ha y hiányzik: $F(x, y', y'') = 0$. Ekkor $p(x) = y'(x)$ helyettesítéssel ($y''(x) = p'(x)$) elsőrendű egyenletet kapunk $p(x)$-re. Ezt megoldva $y = \int p(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Ha x hiányzik: $F(y, y', y'') = 0$. Ekkor $p(y) = y'$ helyettesítéssel ($y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p$) $p(y)$-ra elsőrendű differenciálegyenletet kapunk. Ennek megoldása után $y' = p(y)$ elsőrendű szétválasztható egyenlet megoldása y.

3. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat!

$$y''y - (y')^2 = 0$$

(a) $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

(b) $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

Megoldásvázlat $p(y) = y'$ helyettesítés után

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p \cdot y - p^2 = 0$$

egyenlet adódik. Ez szétválasztható, általános megoldása $p(y) = c \cdot y$. Így y a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = cy$ szétválasztható egyenlet megoldásából adódik, vagyis $y = c_1 e^{c_2 x}$.

(a) $y(0) = 0$-ból $c_1 = 0$, így viszont másik feltétel nem teljesülhet, azaz nincs megoldás.

(b) Kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, azaz $y = e^{3x}$.

4. feladat Adjuk meg az összes $y(x)$ függvényt, melyre $y'' = e^{2x} + \cos(3x)$.

Megoldásvázlat Jobb oldalt kétszer integrálva: $y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\cos(3x) + c_1 x + c_2$.

5. feladat Adjuk meg az alábbi egyenlet általános megoldását!

$$y'' = \frac{y'}{x} + x \sin x$$

Megoldásvázlat $p(x) = y'(x)$ helyettesítés után p-re elsőrendű lineáris egyenlet adódik. Ennek megoldása konstans variációs módszerrel $p(x) = c \cdot x - \cos x \cdot x$. Ezt integrálva

$$y = c_1 x^2 - x \sin x - \cos x + c_2.$$