Matematika A3 építőmérnököknek 4. gyakorlat
Konstans variációs módszer, hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Konstans variációs módszer

Konstans variációs módszerrel

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{1}$$

alakú másodrendű, lineáris (akár változó együtthatós) inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását tudjuk előállítani, ahol g tetszőleges folytonos függvény.

A módszer lépései:

1. Állítsuk elő (1) homogén részének általános megoldását $Y_{h,\text{ált}} = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban.
2. Ekkor a partikuláris megoldást keressük $y_p = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$ alakban (azaz a homogén egyenlet általános megoldásában a c_1, c_2 konstansokat ismeretlen $C_1(t)$, $C_2(t)$ függvényekkel helyettesítjük).
3. Határozzuk meg az ismeretlen függvények deriváltjait ($C_1'(t)$, $C_2'(t)$) az alábbi egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{aligned} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) &= 0 \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) &= g(t) \end{aligned}$$

4. $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ integrálásával megkapjuk $C_1(t)$, $C_2(t)$ függvényeket. Ezekkel felírjuk y_p-t és (1) általános megoldása $y = Y_{h,\text{ált}} + y_p$ lesz.

Megjegyzés: a módszer ugyanarra való, mint próbafüggvény-módszer, de ez általánosabb, hiszen változó együtthatós esetben is működik és nem kell $g(t)$-nek speciális alakúnak lennie. Viszont, ha lehet használni próbafüggvény-módszert, az általában könnyebben számolható.

1. feladat Keressük meg az alábbi egyenlet partikuláris megoldását konstans variációs módszerrel!

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}$$

2. feladat Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet!

$$t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0 \tag{2}$$

Ellenőrizzük le, hogy $Y_1 = t$ és $Y_2 = te^t$ megoldása (2) homogén részének! Adjuk meg az inhomogén egyenlet általános megoldását!

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Hiányos másodrendű differenciálegyenletről akkor beszélünk, ha x, y és y' közül valamelyik (akár egyszerre több) nem jelenik meg az egyenletben. Három típussal foglalkozunk részletesebben:

1. Ha y és y' is hiányzik: $y'' = f(x)$. Ekkor $y = \int\int f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$.
2. Ha y hiányzik: $F(x, y', y'') = 0$. Ekkor $p(x) = y'(x)$ helyettesítéssel ($y''(x) = p'(x)$) elsőrendű egyenletet kapunk $p(x)$-re. Ezt megoldva $y = \int p(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Ha x hiányzik: $F(y, y', y'') = 0$. Ekkor $p(y) = y'$ helyettesítéssel ($y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p$) $p(y)$-ra elsőrendű differenciálegyenletet kapunk. Ennek megoldása után $y' = p(y)$ elsőrendű szétválasztható egyenlet megoldása y.

3. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat!

$$y''y - (y')^2 = 0$$

(a) $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

(b) $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

4. feladat Adjuk meg az összes $y(x)$ függvényt, melyre $y'' = e^{2x} + \cos(3x)$.

5. feladat Adjuk meg az alábbi egyenlet általános megoldását!

$$y'' = \frac{y'}{x} + x \sin x$$