Matematika A3 építőmérnököknek 4. gyakorlat
Próbafüggvény-módszer, konstans variációs módszer

1. feladat Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin t \tag{1}$$

Megoldásvázlat A karakterisztikus egyenlet gyökei: $r_1 = -1+2i$, $r_2 = -1-2i$, így az $y''+2y'+5y = 0$ homogén egyenlet általános megoldása $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t)$.

Az inhomogén rész $g(t) = e^{-t} \sin t$, így próbafüggvény-módszert használva az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $y_p = p_0 e^{-t} \cos t + q_0 e^{-t} \sin t$ alakban keressük.

y_p függvényt kétszer lederiválva, majd (1) egyenletbe visszahelyettesítve az $e^{-t} \cos t$ együtthatóiból $3p_0 = 0$, így $p_0 = 0$. Másrészt $e^{-t} \sin t$ együtthatóiból $4p_0 + 3q_0 = 1$, így $q_0 = \frac{1}{3}$. Így egy partikuláris megoldás: $y_p = \frac{1}{3} e^{-t} \sin t$.

Ebből (1) általános megoldása:

$$y = Y_{h,\text{ált}} + y_p = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t) + \frac{1}{3} e^{-t} \sin t.$$

2. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \tag{2}$$

Megoldásvázlat A karakterisztikus egyenlet gyökei 1 és 2, így a homogén rész általános megoldása $Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$.

Az inhomogén rész $g(t) = 2e^t$. Mivel 1 gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért most $s = 1$, azaz a partikuláris megoldást $y_p = p_0 t e^t$ alakban keressük. Ezt kétszer lederiválva, majd visszahelyettesítve (2) egyenletbe az e^t együtthatóiból $p_0 = -2$. Így $y_p = -2te^t$, vagyis (2) általános megoldása:

$$y = Y_{h,\text{ált}} + y_p = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - 2te^t.$$

A kezdeti értékekből

$$1 = c_1 + c_2,$$
$$2 = c_1 + 2c_2 - 2.$$

Így $c_1 = -2$, $c_2 = 3$ és $y = -2e^t + 3e^{2t} - 2te^t$.

Konstans variációs módszer

Konstans variációs módszerrel

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{3}$$

alakú másodrendű, lineáris (akár változó együtthatós) inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását tudjuk előállítani, ahol g tetszőleges folytonos függvény.

A módszer lépései:

1. Állítsuk elő (3) homogén részének általános megoldását $Y_{h,\text{ált}} = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban.
2. Ekkor a partikuláris megoldást keressük $y_p = C_1(t) y_1(t) + C_2(t) y_2(t)$ alakban (azaz a homogén egyenlet általános megoldásában a c_1, c_2 konstansokat ismeretlen $C_1(t)$, $C_2(t)$ függvényekkel helyettesítjük).
3. Határozzuk meg az ismeretlen függvények deriváltjait ($C_1'(t)$, $C_2'(t)$) az alábbi egyenletrendszer megoldásával:
$$C_1'(t) y_1(t) + C_2'(t) y_2(t) = 0$$
$$C_1'(t) y_1'(t) + C_2'(t) y_2'(t) = g(t)$$
4. $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ integrálásával megkapjuk $C_1(t)$, $C_2(t)$ függvényeket. Ezekkel felírjuk y_p-t és (3) általános megoldása $y = Y_{h,\text{ált}} + y_p$ lesz.

Megjegyzés: a módszer ugyanarra való, mint próbafüggvény-módszer, de ez általánosabb, hiszen változó együtthatós esetben is működik és nem kell $g(t)$-nek speciális alakúnak lennie. Viszont, ha lehet használni próbafüggvény-módszert, az általában könnyebben számolható.

3. feladat Keressük meg az alábbi egyenlet partikuláris megoldását konstans variációs módszerrel!

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}$$

Megoldásvázlat A 3. gyakorlat 1. feladatában láttuk, hogy a homogén rész általános megoldása

$$Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}.$$

Tehát a partikuláris megoldást $y_p = C_1(t)e^t + C_2 e^{-2t}$ alakban keressük.
A megoldandó egyenletrendszer:

$$C_1' e^t + C_2' e^{-2t} = 0,$$
$$C_1' e^t - 2C_2' e^{-2t} = e^{-t}.$$

Ebből $C_1' = \frac{1}{3}e^{-2t}$, $C_2' = -\frac{1}{3}e^t$, amiből $C_1 = -\frac{1}{6}e^{-2t}$, $C_2 = -\frac{1}{3}e^t$, azaz $y_p = -\frac{1}{2}e^{-t}$.
Megjegyzés: 3. gyakorlat 5. feladatában ugyanezt kaptuk próbafüggvény-módszerrel.

4. feladat Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet!

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0 \tag{4}$$

Ellenőrizzük le, hogy $Y_1 = t$ és $Y_2 = te^t$ megoldása (4) homogén részének! Adjuk meg az inhomogén egyenlet általános megoldását!

Megoldásvázlat Y_1 és Y_2 visszahelyettesítéssel ellenőrizhető. Mivel ezek nem egymás konstansszorosai a homogén egyenlet általános megoldása: $Y_{h,\text{ált}} = c_1 t + c_2 te^t$.

(4)-et el kell osztani t^2-tel, hogy y'' együtthatója 1 legyen, így $g(t) = 2t$. Így a megoldandó egyenletrendszer:

$$C_1' t + C_2' te^t = 0,$$
$$C_1' + C_2'(e^t + te^t) = 2t.$$

Ebből $C_1' = -2$, $C_2' = 2e^{-t}$, amiből $C_1 = -2t$, $C_2 = -2e^{-t}$, azaz $y_p = -2t^2 - 2t$. Itt $-2t$ beolvasztható $c_1 t$ tagba, így az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 t + c_2 te^t - 2t^2.$$

5. feladat Adjuk meg az alábbi egy partikuláris megoldását konstans variációs módszerrel!

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t}\sin t$$

Megoldásvázlat Az 1. feladatból tudjuk, hogy a homogén rész általános megoldása:

$$Y_{h,\text{ált}} = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t).$$

A konstans variációs módszer során megoldandó egyenletrendszer:

$$C_1' e^{-t}\cos(2t) + C_2' e^{-t}\sin(2t) = 0,$$
$$C_1'(-e^{-t}\cos(2t) - 2e^{-t}\sin(2t)) + C_2'(2e^{-t}\cos(2t) - e^{-t}\sin(2t)) = e^{-t}\sin t.$$

Ebből $C_1' = -\sin^2 t \cos t$, $C_2' = \cos^2 t \sin t - \frac{1}{2}\sin t$, amiből

$$C_1 = -\frac{1}{3}\sin^3 t,\ C_2 = -\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{2}\cos t,$$

azaz $y_p = e^{-t}\left(-\frac{1}{3}\sin^3 t\cos(2t) + (-\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{2}\cos t)\sin(2t)\right) = \frac{1}{3}e^{-t}\sin t$, ami megegyezik az 1. feladatban kapott megoldással.