

Matematika A3 építőmérnököknek 4. gyakorlat Próbafüggvény-módszer, konstans variációs módszer

1. feladat Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin t \quad (1)$$

2. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \quad (2)$$

Konstans variációs módszer

Konstans variációs módszerrel

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (3)$$

alakú másodrendű, lineáris (akár változó együtthatós) inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását tudjuk előállítani, ahol g tetszőleges folytonos függvény.

A módszer lépései:

1. Állítsuk elő (3) homogén részének általános megoldását $Y_{h,\text{ált}} = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban.
2. Ekkor a partikuláris megoldást keressük $y_p = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$ alakban (azaz a homogén egyenlet általános megoldásában a c_1, c_2 konstansokat ismeretlen $C_1(t), C_2(t)$ függvényekkel helyettesítjük).
3. Határozzuk meg az ismeretlen függvények deriváltjait ($C_1'(t), C_2'(t)$) az alábbi egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{aligned} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) &= 0 \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) &= g(t) \end{aligned}$$

4. $C_1'(t), C_2'(t)$ integrálásával megkapjuk $C_1(t), C_2(t)$ függvényeket. Ezekkel felírjuk y_p -t és (3) általános megoldása $y = Y_{h,\text{ált}} + y_p$ lesz.

Megjegyzés: a módszer ugyanarra való, mint próbafüggvény-módszer, de ez általánosabb, hiszen változó együtthatós esetben is működik és nem kell $g(t)$ -nek speciális alakúnak lennie. Viszont, ha lehet használni próbafüggvény-módszert, az általában könnyebben számolható.

3. feladat Keressük meg az alábbi egyenlet partikuláris megoldását konstans variációs módszerrel!

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}$$

4. feladat Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet!

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0 \quad (4)$$

Ellenőrizzük le, hogy $Y_1 = t$ és $Y_2 = te^t$ megoldása (4) homogén részének! Adjuk meg az inhomogén egyenlet általános megoldását!

5. feladat Adjuk meg az alábbi egy partikuláris megoldását konstans variációs módszerrel!

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin t$$