Matematika A3 építőmérnököknek 5. gyakorlat
Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Hiányos másodrendű differenciálegyenletről akkor beszélünk, ha x, y és y' közül valamelyik (akár egyszerre több) nem jelenik meg az egyenletben. Három típussal foglalkozunk részletesebben:

1. Ha y és y' is hiányzik: $y'' = f(x)$. Ekkor $y = \int\int f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$.
2. Ha y hiányzik: $F(x, y', y'') = 0$. Ekkor $p(x) = y'(x)$ helyettesítéssel $(y''(x) = p'(x))$ elsőrendű egyenletet kapunk $p(x)$-re. Ezt megoldva $y = \int p(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Ha x hiányzik: $F(y, y', y'') = 0$. Ekkor $p(y) = y'$ helyettesítéssel $(y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p)$ $p(y)$-ra elsőrendű differenciálegyenletet kapunk. Ennek megoldása után $y' = p(y)$ elsőrendű szétválasztható egyenlet megoldása y.

1. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat!

$$y''y - (y')^2 = 0$$

(a) $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

(b) $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

Megoldásvázlat $p(y) = y'$ helyettesítés után

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p \cdot y - p^2 = 0$$

egyenlet adódik. Ez szétválasztható, általános megoldása $p(y) = c \cdot y$. Így y a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = cy$ szétválasztható egyenlet megoldásából adódik, vagyis $y = c_1 e^{c_2 x}$.

(a) $y(0) = 0$-ból $c_1 = 0$, így viszont másik feltétel nem teljesülhet, azaz nincs megoldás.

(b) Kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, azaz $y = e^{3x}$.

2. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' = 12\sqrt{y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Megoldásvázlat $p(y) = y'$ helyettesítés után szétválasztható egyenletet kapunk, aminek megoldása $p = \pm\sqrt{16y^{3/2} + c}$. Kezdeti feltételekből itt $c = 0$. Így y a $y' = \pm y^{3/4}$ megoldásából adódik: $y = 0$ (ez teljesíti a kezdeti feltételeket) vagy $y = cx^4$, ami a kezdeti feltételből $y = x^4$.

3. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' = -2t(y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

Megoldásvázlat $p(t) = y'(t)$ helyettesítéssel szétválasztható egyenletet kapunk, aminek megoldása $p(t) = \frac{1}{t^2 - k}$, ahol kezdeti feltételből $k = 1$. Ezt integrálva $y = \frac{1}{2}(\log(1-t) - \log(1+t)) + c$, ahol kezdeti feltételből $c = 0$.

4. feladat Adjuk meg az összes $y(x)$ függvényt, melyre $y'' = e^{2x} + \cos(3x)$.

Megoldásvázlat Jobb oldalt kétszer integrálva: $y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\cos(3x) + c_1 x + c_2$.

5. feladat Adjuk meg az alábbi egyenlet általános megoldását!

$$y'' = \frac{y'}{x} + x \sin x$$

Megoldásvázlat $p(x) = y'(x)$ helyettesítés után p-re elsőrendű lineáris egyenlet adódik. Ennek megoldása konstans variációs módszerrel $p(x) = c \cdot x - \cos x \cdot x$. Ezt integrálva

$$y = c_1 x^2 - x \sin x - \cos x + c_2.$$