Matematika A3 építőmérnököknek 6. gyakorlat
Feltételes valószínűség, szorzási szabály, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel, függetlenség

Feltételes valószínűség

Ha B olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$, akkor A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége azt fejezi ki, hogy azon eseteknek, amikor B bekövetkezik hányad részében következik be A esemény is:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Szorzási szabály:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}(E_n|E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}).$$

Teljes valószínűségi tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer (azaz bármely kettő metszete üres és lefedik a teljes eseményteret). Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) + \dots$$

Bayes-tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A|B_k)}{\sum\limits_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A|B_i)}.$$

1. feladat Feldobtunk három kockát. Feltéve, hogy a dobott számok összege 15, mi a valószínűsége, hogy van köztük hatos?

Megoldásvázlat Legyen $A = \{\text{dobtunk 6-ost}\}$, $B = \{\text{az összeg 15}\}$. Ekkor $\mathbb{P}(B) = \frac{10}{216}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{216}$, így $\mathbb{P}(A|B) = \frac{9}{10}$.

2. feladat Egy bizonyos országban születettek 89%-a éri meg a 60 éves kort és 57%-a éri meg a 80 évet. Mi a valószínűsége, hogy egy 60 éves ember megéri a 80 évet?

Megoldásvázlat Legyen A, illetve B az az esemény, hogy valaki megéri a 60, illetve a 80 évet. Ekkor $\mathbb{P}(A) = 0,89$, $\mathbb{P}(B) = 0,57$. Tudjuk, hogy $B \subset A$ (azaz $A \cap B = B$, így $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \approx 0,64$.

3. feladat Az ikrek lehetnek egy- illetve kétpetéjűek. Általában az ikrek egyharmada egypetéjű, ők természetesen egyneműek; a kétpetéjű ikreknél tegyük fel, hogy minden lehetőség egyenlő valószínűséggel áll fenn. Mindezek alapján mi a valószínűsége, hogy egy születendő ikerpár mindkét tagja fiú?

Megoldásvázlat Definiáljuk az alábbi eseményeket:

$$A = \{\text{egy ikerpár egypetéjű}\}$$

$$B = \{\text{egy ikerpár kétpetéjű}\}$$

$$C = \{\text{egy ikerpár mindkét tagja fiú}\}.$$

Ekkor $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(C|A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C|B) = \frac{1}{3}$. Teljes valószínűség tétele szerint $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{7}{18}$.

4. feladat A zsebemben három pénzérme van. Egy köztük olyan, mellyel 0,5 valószínűséggel, a két másikkal $0,6 - 0,6$ valószínűséggel dobok fejet. Találomra kiveszem az egyik pénzérmét és háromszor feldobom.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás fej lesz?

b) Feltéve, hogy mindhárom dobás fej lett, mi a valószínűsége, hogy a szabályos érmével dobtam?

Megoldásvázlat Legyen $A = \{\text{szabályos érmét vettem ki}\}$, $B = \{\text{cinkelt érmét vettem ki}\}$, $C = \{\text{mindhárom dobás fej}\}$. Ekkor $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(C|A) = 0,5^3 = \frac{1}{8}, \mathbb{P}(C|B) = 0,6^3 = \frac{27}{125}$.

a) Teljes valószínűség tétele szerint $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|B) \cdot \mathbb{P}(B) \approx 0,19$.

b) Bayes-tétellel $\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C|A)}{\mathbb{P}(C)} \approx 0,22$.

Függetlenség

A és B esemény, melyre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, független, ha

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C).$$

$\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$ esetén A és B mindig független.

Tétel: A és B pontosan akkor független, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Tétel: $A_1, A_2, A_3, \ldots$ események sorozata pontosan akkor teljesen független, ha minden k-ra és $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$-ra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

5. feladat Legyenek az A, B és C események teljesen függetlenek és legyen $P(A) = P(B) = 1/3, P(C) = 1/4$. Határozza meg az $AB + AC$ esemény valószínűségét!

Megoldásvázlat Szita formulát használva $A \cap B$ és $A \cap C$ eseményekre, majd kihasználva a teljes függetlenséget (azaz metszetek valószínűsége a valószínűségek szorzata):

$$\mathbb{P}(AB + AC) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(AB \cap AC) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(ABC) = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

6. feladat Egy érmét háromszor feldobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy legfeljebb egy fejet dobtunk és B azt, hogy fejet és írást is dobtunk. Függetlenek-e az A és B események?

Megoldásvázlat A lehetséges esetek összeszámolásával $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Vagyis $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ teljesül, így függetlenek.

7. feladat Vizsgáljuk meg az alábbi példákban, hogy a megadott A, B és C események függetlenek-e páronként, illetve teljesen.

a) Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik.

b) Feldobunk egy szabályos dobókockát, legyen A az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem nagyobb, B az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem kisebb, és $C = B$.

Megoldásvázlat

a) Mindhárom esemény valószínűsége $\frac{1}{2}$ és bármelyik kettő metszetének valószínűsége $\frac{1}{4}$. Tehát páronként függetlenek. Viszont a hármas metszet valószínűsége is $\frac{1}{4}$, vagyis teljesen nem függetlenek.

b) $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$. Noha $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$, de mégsem teljesen függetlenek, hiszen páronként sem azok (pl. B és C esetén ez nyilvánvaló).

8. feladat Egy spam-szűrő program úgy működik, hogy a spamekben gyakran előforduló szavakat figyeli. Tegyük fel, hogy az emailek 80%-a spam. A spamek 10%-ában az "ingyen" szó előfordul, míg ugyanez a szó a rendes email-eknek csupán 1%-ában olvasható. Egy most érkezett email-ben az "ingyen" szó olvasható. Mi a valószínűsége, hogy az spam?

Megoldásvázlat Legyen $A = \{\text{az email spam}\}$, $B = \{\text{szerepel az "ingyen" szó}\}$. Ekkor $\mathbb{P}(A) = 0,8$, $\mathbb{P}(B|A) = 0,1$, $\mathbb{P}(B|A^C) = 0,01$. Így Bayes-tétellel

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^C) \cdot \mathbb{P}(B|A^C)} = \frac{0,08}{0,08 + 0,002} \approx 0,98.$$

9. feladat Egy dobozból, melyben 1 piros és 4 fehér golyó található, kiveszek egyet és anélkül, hogy megnézném, eldobom. Mi a valószínűsége, hogy ezután pirosat húzok?

Megoldásvázlat Második csak akkor lehet piros, ha az első fehér, ennek a valószínűsége $4/5$. Ha az első fehér, akkor a második $1/4$ valószínűséggel fehér. Így szorzási szabály szerint annak a valószínűsége, hogy a második piros az $1/5$.

10. feladat Két kockát feldobok. Mi a valószínűsége, hogy különbözőket dobtam, feltéve, hogy dobtam hatost?

Megoldásvázlat 11 olyan elemi esemény van, amikor dobtunk hatost, ebből 10 esetben a dobások különbözők. Így a keresett valószínűség $\frac{10}{11}$.

11. feladat Egy érmét háromszor feldobunk. Feltéve, hogy van fej a dobások között, mi a valószínűsége, hogy írás is van?

Megoldásvázlat 7 olyan elemi esemény van, amikor dobtunk fejet, ebből 6 esetben dobtunk írást is. Így a keresett valószínűség $\frac{6}{7}$.

12. feladat Van a zsebünkben egy szabályos és egy olyan pénzérme, amelynek mindkét oldala fej. Kivesszük az egyiket és feldobjuk kétszer, az eredmény mindkét esetben fej. Mi a valószínűsége, hogy a hamissal dobtunk?

Megoldásvázlat Legyen A az az esemény, hogy a szabálytalan érmével dobálunk és B az az esemény, hogy mindkét dobás fej. Ekkor Bayes-tételt használva

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{1/2}{1/2 + 1/8} = \frac{4}{5}.$$