Matematika A3 építőmérnököknek 6. gyakorlat
Feltételes valószínűség, szorzási szabály, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel, függetlenség

Feltételes valószínűség

Ha B olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$, akkor A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége azt fejezi ki, hogy azon eseteknek, amikor B bekövetkezik hányad részében következik be A esemény is:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Szorzási szabály:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n|E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}).$$

Teljes valószínűségi tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer (azaz bármely kettő metszete üres és lefedik a teljes eseményteret). Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) + \dots$$

Bayes-tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A|B_k)}{\sum\limits_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A|B_i)}.$$

1. feladat Feldobtunk három kockát. Feltéve, hogy a dobott számok összege 15, mi a valószínűsége, hogy van köztük hatos?

2. feladat Egy bizonyos országban születettek 89%-a éri meg a 60 éves kort és 57%-a éri meg a 80 évet. Mi a valószínűsége, hogy egy 60 éves ember megéri a 80 évet?

3. feladat Az ikrek lehetnek egy- illetve kétpetéjűek. Általában az ikrek egyharmada egypetéjű, ők természetesen egyneműek; a kétpetéjű ikreknél tegyük fel, hogy minden lehetőség egyenlő valószínűséggel áll fenn. Mindezek alapján mi a valószínűsége, hogy egy születendő ikerpár mindkét tagja fiú?

4. feladat A zsebemben három pénzérme van. Egy köztük olyan, mellyel 0,5 valószínűséggel, a két másikkal $0,6 - 0,6$ valószínűséggel dobok fejet. Találomra kiveszem az egyik pénzérmét és háromszor feldobom.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás fej lesz?

b) Feltéve, hogy mindhárom dobás fej lett, mi a valószínűsége, hogy a szabályos érmével dobtam?

Függetlenség

A és B esemény, melyre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, független, ha

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C).$$

$\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$ esetén A és B mindig független.

Tétel: A és B pontosan akkor független, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Tétel: $A_1, A_2, A_3, \dots$ események sorozata pontosan akkor teljesen független, ha minden k-ra és $i_1 < i_2 < \dots < i_k$-ra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

5. feladat Legyenek az A, B és C események teljesen függetlenek és legyen $P(A) = P(B) = 1/3, P(C) = 1/4$. Határozza meg az $AB + AC$ esemény valószínűségét!

6. feladat Egy érmét háromszor feldobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy legfeljebb egy fejet dobtunk és B azt, hogy fejet és írást is dobtunk. Függetlenek-e az A és B események?

7. feladat Vizsgáljuk meg az alábbi példákban, hogy a megadott A, B és C események függetlenek-e páronként, illetve teljesen.

a) Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik.

b) Feldobunk egy szabályos dobókockát, legyen A az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem nagyobb, B az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem kisebb, és $C = B$.

8. feladat Egy spam-szűrő program úgy működik, hogy a spamekben gyakran előforduló szavakat figyeli. Tegyük fel, hogy az emailek 80%-a spam. A spamek 10%-ában az "ingyen" szó előfordul, míg ugyanez a szó a rendes email-eknek csupán 1%-ában olvasható. Egy most érkezett email-ben az "ingyen" szó olvasható. Mi a valószínűsége, hogy az spam?

9. feladat Egy dobozból, melyben 1 piros és 4 fehér golyó található, kiveszek egyet és anélkül, hogy megnézném, eldobom. Mi a valószínűsége, hogy ezután pirosat húzok?

10. feladat Két kockát feldobok. Mi a valószínűsége, hogy különbözőket dobtam, feltéve, hogy dobtam hatost?

11. feladat Egy érmét háromszor feldobunk. Feltéve, hogy van fej a dobások között, mi a valószínűsége, hogy írás is van?

12. feladat Van a zsebünkben egy szabályos és egy olyan pénzérme, amelynek mindkét oldala fej. Kivesszük az egyiket és feldobjuk kétszer, az eredmény mindkét esetben fej. Mi a valószínűsége, hogy a hamissal dobtunk?