Matematika A3 építőmérnököknek 7. gyakorlat
Valószínűségi változók, eloszlásfüggvény, nevezetes diszkrét valószínűségi változók, súlyfüggvény

Valószínűségi változók

A **valószínűségi változók** az eseménytéren értelmezett függvények. Egy valószínűségi változó **diszkrét**, ha csak véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel.

Az X valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye**:

$$F(a) = \mathbb{P}(X < a).$$

Ezzel részletesebben következő gyakorlaton foglalkozunk.

Ha X diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, melyek valószínűsége rendre $p(x_i)$, azaz $p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$, akkor $p(.)$ függvény X **súlyfüggvénye**.

X és Y valószínűségi változók **függetlenek**, ha $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ események függetlenek minden $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazra.

Nevezetes eloszlások

Bernoulli: X valószínűségi változó Bernoulli eloszlású p paraméterrel, ha p valószínűséggel 1, $1-p$ valószínűséggel 0. Ez tehát egy p valószínűséggel sikeres kísérlet eredményét jellemzi. Jel: $X \sim$ BER(p). Súlyfüggvénye:

$$p(0) = 1 - p, \quad p(1) = p.$$

Binomiális: Ha egy kísérletet n-szer végzünk el egymástól függetlenül, ahol a siker valószínűsége p és X jelöli a sikeres kísérletek számát, akkor X eloszlása binomiális n, p paraméterekkel. Jel: $X \sim \mathrm{BIN}(n,p)$ vagy $X \sim \mathrm{B}(n,p)$. Súlyfüggvénye:

$$p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

A súlyfüggvény $k = [(n+1)p]$-ben maximális.

Ha $X \sim \mathrm{BIN}(n,p)$, akkor n darab, független $\mathrm{BER}(p)$ eloszlású valószínűségi változó összege.

Poisson: Sok, kis valószínűségű, független kísérletből a sikeresek számát Poisson eloszlású valószínűségi változóval jellemezhetjük. X valószínűségi változó eloszlása λ-paraméterű Poisson eloszlás (jel: $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$), ha súlyfüggvénye:

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

A súlyfüggvény $k = [\lambda]$-ban maximális.

Ha n elég nagy, akkor $\mathrm{BIN}(n,p)$ jól közelíthető $\mathrm{POI}(np)$ eloszlással.

Geomteriai: Egy kísérletet végezzünk el végtelen sokszor úgy, hogy a kísérletek egymástól függetlenek. Ha X a kísérletek száma az első sikerig (a sikerest is beleszámítva), akkor X geometriai eloszlású p paraméterrel, ahol p egy kísérlet sikerességének valószínűsége. Jel: $X \sim \mathrm{GEO}(p)$. Súlyfüggvénye:

$$p(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

1. feladat Egy adóhatóság a cégek 5%-át vizsgálja meg évente teljesen véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy egy adott céget öt év alatt

a) legalább egyszer megvizsgálnak?

b) legalább kétszer megvizsgálnak?

Megoldásvázlat A vizsgálatok száma 5 év alatt $\mathrm{BIN}(5, 0.05)$. Így

a) $1 - 0.95^5 \approx 0.22$

b) $1 - 0.95^5 - 5 \cdot 0.95^4 \cdot 0.05 \approx 0.023$

2. feladat Tegyük fel, hogy egy egyetem 2400 hallgatója éjjel-nappal kétóránként ellenőrzi az emailjét és egy ellenőrzés 1 percet vesz igénybe (tehát 1/120 annak a valószínűsége, hogy egy adott hallgató éppen az emailjével van elfoglalva). Mi a közelítő valószínűsége, hogy éppen 19, 20 vagy 21 hallgató ellenőrzi az emailjét?

Megoldásvázlat Azon hallgatók száma, akik épp az emailjüket ellenőrzik BIN$(2400, \frac{1}{120})$ eloszlású, ami jól közelíthető POI(20) eloszlással. Így a kérdezett közelítő valószínűség: $e^{-20} \cdot (\frac{20^{19}}{19!} + \frac{20^{20}}{20!} + \frac{20^{21}}{21!}) \approx 0.26$.

3. feladat Egy sportlövő 0.9 valószínűséggel lő 10-est. Egy lövéssorozat 10 lövésből áll és akkor elfogadható számára, ha legalább 9 tízes találat van benne. Mi a valószínűsége, hogy három lövéssorozat mindegyike elfogadható lesz?

Megoldásvázlat Egy lövéssorozatban a 10-es lövések száma BIN(10,0.9) eloszlású. Így annak a valószínűsége, hogy egy lövéssorozat sikeres $0.9^{10} + 10 \cdot 0.9^9 \cdot 0.1 \approx 0.736$. Annak a valószínűsége, hogy mindhárom lövéssorozat sikeres $0.736^3 \approx 0.399$.

4. feladat A roulette keréken 38 szám van: 1-től 36-ig, 0 és dupla 0. Ha Kovács úr mindig arra fogad, hogy az eredmény 1-től 12-ig terjed, mi a valószínűsége, hogy

a) Kovács úr elveszti mind az 5 első fogadását,

b) először a negyedik fogadáson nyer?

Megoldásvázlat

a) $\left(\frac{26}{38}\right)^5$

b) $\left(\frac{26}{38}\right)^3 \cdot \frac{12}{38}$

5. feladat Az AB-negatív vércsoport gyakorisága 1%. Ha 100 embert véletlenszerűen kiválasztunk, akkor

a) mi a közelítő valószínűsége (Poisson eloszlást használva), hogy közülük legalább egynek a vércsoportja AB-negatív?

b) mi a pontos valószínűsége, hogy közülük legalább egynek a vércsoportja AB-negatív?

Megoldásvázlat Az AB-vércsoportú emberek száma BIN$(100, 0.01)$, azaz POI(1) eloszlással közelíthető. Így

a) $1 - e^{-1} \approx 0.63$

b) $1 - 0.99^{100} \approx 0.63$

6. feladat Hétközben (hétfőtől péntekig) 0.25 valószínűséggel késik a reggeli vonat.

a) Mi a valószínűsége, hogy hétközben legfeljebb két napon késik?

b) Legyen jó hét az, amelyen legfeljebb két napon késik. Mi a valószínűsége, hogy 4 hétből legalább 3 hét jó hét lesz?

Megoldásvázlat

a) Héten a késések számának eloszlása BIN(5,0.25). Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2-szer késik: $p := 0.75^5 + 5 \cdot 0.75^4 \cdot 0.25 + \binom{5}{2} \cdot 0.75^3 \cdot 0.25^2 \approx 0.9$.

b) 4 hét alatt a jó hetek számának eloszlása BIN$(4, p)$. Így annak a valószínűsége, hogy legalább 3 hét jó: $p^4 + 4 \cdot p^3 \cdot (1 - p) \approx 0.95$.

7. feladat Az A érme feldobásakor 0.4 valószínűséggel kapunk fejet, a B érme feldobásakor ugyanez a valószínűség 0.7. E két érme közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk, és 10-szer feldobunk.

a) Függetlenek-e e dobások kimenetelei egymástól?

b) Mi a valószínűsége, hogy pontosan 7 dobás lesz fej?

c) Feltéve, hogy az első dobás fej, mi a valószínűsége, hogy az A érmével dobunk?

d) Feltéve, hogy az első dobás fej, mi a valószínűsége, hogy összesen 7 dobás lesz fej?

Megoldásvázlat Legyen A és B az az esemény, hogy A vagy B érmével dobunk. E, F legyen az az esemény, hogy az első, illetve a második dobás fej. C legyen az, hogy pontosan 7 fejet dobtunk.

a) $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) = 0.55$ (teljes valószínűség tételével A, B teljes eseményrendszerre nézve). Hasonlóan $\mathbb{P}(E \cap F) = 0.325 \neq \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F)$, így nem függetlenek.

b) Teljes valószínűség tételével (A, B teljes eseményrendszerre nézve) és használva, hogy a fejek száma binomiális eloszlású $n = 10$ és az érmétől függően $p = 0.4$ vagy $p = 0.7$ paraméterekkel: $\mathbb{P}(C) \approx 0.15$.

c) Bayes-tétellel: $\mathbb{P}(A|E) = \frac{4}{11}$.

d) $\mathbb{P}(C \cap E)$-t teljes valószínűség tétellel számolható. Ezután Bayes-tételből $\mathbb{P}(C|E)$ meghatározható.

8. feladat A kocogj velünk mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

Megoldásvázlat Egy versenyzőben a kullancsok száma POI(λ) eloszlású ismeretlen λ-ra. Ekkor, ha N az indulók száma, akkor a feltételekből $N \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda} = 300$ és $N \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot e^{-\lambda} = 75$. Ebből $\lambda = 0.5$ és $N \approx 989$.