## Matematika A3 építőmérnököknek 7. gyakorlat
## Feltételes valószínűség, szorzási szabály, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel, függetlenség

### Feltételes valószínűség

Ha $B$ olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$, akkor $A$ esemény $B$ eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége azt fejezi ki, hogy azon eseteknek, amikor $B$ bekövetkezik hányad részében következik be $A$ esemény is:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

**Szorzási szabály:**

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n|E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}).$$

**Teljes valószínűségi tétel:** Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer (azaz bármely kettő metszete üres és lefedik a teljes eseményteret). Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) + \dots$$

**Bayes-tétel:** Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A|B_k)}{\sum\limits_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A|B_i)}.$$

**1. feladat** Feldobtunk három kockát. Feltéve, hogy a dobott számok összege 15, mi a valószínűsége, hogy van köztük hatos?

**2. feladat** Egy bizonyos országban születettek 89%-a éri meg a 60 éves kort és 57%-a éri meg a 80 évet. Mi a valószínűsége, hogy egy 60 éves ember megéri a 80 évet?

**3. feladat** Az ikrek lehetnek egy- illetve kétpetéjűek. Általában az ikrek egyharmada egypetéjű, ők természetesen egyneműek; a kétpetéjű ikreknél tegyük fel, hogy minden lehetőség egyenlő valószínűséggel áll fenn. Mindezek alapján mi a valószínűsége, hogy egy születendő ikerpár mindkét tagja fiú?

**4. feladat** A zsebemben három pénzérme van. Egy köztük olyan, mellyel 0,5 valószínűséggel, a két másikkal $0,6 - 0,6$ valószínűséggel dobok fejet. Találomra kiveszem az egyik pénzérmét és háromszor feldobom.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás fej lesz?

b) Feltéve, hogy mindhárom dobás fej lett, mi a valószínűsége, hogy a szabályos érmével dobtam?

### Függetlenség

$A$ és $B$ esemény, melyre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, független, ha

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C).$$

$\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$ esetén $A$ és $B$ mindig független.

**Tétel:** $A$ és $B$ pontosan akkor független, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

**Tétel:** $A_1, A_2, A_3, \dots$ események sorozata pontosan akkor teljesen független, ha minden $k$-ra és $i_1 < i_2 < \dots < i_k$-ra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

**5. feladat** Legyenek az $A, B$ és $C$ események teljesen függetlenek és legyen $P(A) = P(B) = 1/3, P(C) = 1/4$. Határozza meg az $AB + AC$ esemény valószínűségét!

**6. feladat** Egy érmét háromszor feldobunk. Jelentse $A$ azt az eseményt, hogy legfeljebb egy fejet dobtunk és $B$ azt, hogy fejet és írást is dobtunk. Függetlenek-e az $A$ és $B$ események?

**7. feladat** Vizsgáljuk meg az alábbi példákban, hogy a megadott $A$, $B$ és $C$ események függetlenek-e páronként, illetve teljesen.

a) Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen $A$ az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, $B$ az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és $C$ az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik.

b) Feldobunk egy szabályos dobókockát, legyen $A$ az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem nagyobb, $B$ az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem kisebb, és $C = B$.

**8. feladat** Egy spam-szűrő program úgy működik, hogy a spamekben gyakran előforduló szavakat figyeli. Tegyük fel, hogy az emailek 80%-a spam. A spamek 10%-ában az "ingyen" szó előfordul, míg ugyanez a szó a rendes email-eknek csupán 1%-ában olvasható. Egy most érkezett email-ben az "ingyen" szó olvasható. Mi a valószínűsége, hogy az spam?

**9. feladat** Egy dobozból, melyben 1 piros és 4 fehér golyó található, kiveszek egyet és anélkül, hogy megnézném, eldobom. Mi a valószínűsége, hogy ezután pirosat húzok?

**10. feladat** Két kockát feldobok. Mi a valószínűsége, hogy különbözőket dobtam, feltéve, hogy dobtam hatost?

**11. feladat** Egy érmét háromszor feldobunk. Feltéve, hogy van fej a dobások között, mi a valószínűsége, hogy írás is van?

**12. feladat** Van a zsebünkben egy szabályos és egy olyan pénzérme, amelynek mindkét oldala fej. Kivesszük az egyiket és feldobjuk kétszer, az eredmény mindkét esetben fej. Mi a valószínűsége, hogy a hamissal dobtunk?