

## Matematika A3 építőmérnököknek 8. gyakorlat

### Nevezetes diszkrét valószínűségi változók, diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórása

**Hipergeometriai eloszlás** Van  $N$  termékünk, amiből  $M$  selejtes. Kihúzzunk  $n$ -et és legyen  $X$  a kihúzott selejtes termékek száma. Ekkor  $X$  hipergeometriai eloszlású  $N, M, n$  paraméterekkel. Jel:  $X \sim \text{HIPERGEON}(N, M, n)$ . Súlyfüggvénye:

$$p(k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

**Várható érték** Legyen  $X$  egy diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei  $x_1, x_2, \dots$ , súlyfüggvénye  $p(x_k)$ . Ekkor  $X$  **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i).$$

Vagyis a várható érték  $X$  lehetséges értékeinek súlyozott átlaga.

Várható értékre igazak az alábbi állítások:

- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ ,
- $\mathbb{E}(cX) = c \cdot \mathbb{E}(X)$ ,
- Ha  $X$  és  $Y$  független, akkor  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$ .

**Szórás**  $X$  valószínűségi változó **varianciája** vagy **szórásnégyzete** a várható értéktől való eltérés négyzetének várható értéke, azaz  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$ .

A **szórás** a variancia gyöke:  $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ .

Variációra vonatkozó tételek:

- $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
- $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$
- Ha  $X$  és  $Y$  független, akkor  $\text{Var}(Y_1 + Y_2) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

### Nevezetes eloszlások várható értéke, szórása

$X$ eloszlása	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$
$\text{BER}(p)$	$p$	$p(1-p)$
$\text{BIN}(n, p)$	$np$	$np(1-p)$
$\text{POI}(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda$
$\text{GEO}(p)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$\text{HIPERGEON}(N, M, n)$	$\frac{nM}{N}$	

**1. feladat** Egy dobozban 1 selejtes és 3 hibátlan termék található. Addig húzzunk visszatevéssel, amíg a selejtet ki nem húzzuk. Mi a szükséges húzások számának várható értéke?

**Megoldásvázlat** Legyen  $X$  a húzások száma. Ekkor  $X \sim \text{GEO}(1/4)$ , így  $\mathbb{E}(X) = 4$ .

**2. feladat** A magyar kártyából kiveszünk két lapot. Adjuk meg a kihúzott piros lapok számának négyzetének várható értékét! (A magyar kártyában 32 lap van, ebből 8 piros.)

**Megoldásvázlat** Legyen  $X$  a kihúzott piros lapok száma. Ekkor  $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{69}{124}$ ,  $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{48}{124}$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{7}{124}$ . Így  $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \frac{69}{124} + 1^2 \cdot \frac{48}{124} + 2^2 \cdot \frac{7}{124} = \frac{19}{31}$ .

**3. feladat** Tegyük fel, hogy  $P(X = 0) = 1 - P(X = 1)$ . Ha  $\mathbb{E}(X) = 3\text{Var}(X)$  akkor mivel egyenlő  $P(X = 0)$ ?

**Megoldásvázlat** Legyen  $p = P(X = 1)$ . Ekkor  $X \sim \text{BER}(p)$ , így az egyenletből  $p = 3p(1 - p)$ , vagyis  $p = \frac{2}{3}$ , azaz  $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ .

**4. feladat** Egy családban addig születik gyerek, amíg az fiú nem lesz vagy a gyerekek száma el nem éri a hármat. Mi a gyerekek várható száma és szórása egy ilyen családban?

**Megoldásvázlat** Legyen  $X$  a gyerekek száma. Ekkor  $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{4}$ . Így  $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{4}$ ,  $\mathbb{E}(X^2) = \frac{15}{4}$ ,  $\text{Var}(X) = \frac{11}{16}$ ,  $\mathbb{D}(X) = \frac{\sqrt{11}}{4}$ .

**5. feladat** Feldobunk egy kockát. Ha páros az eredmény, akkor annyi eurót nyerünk, amennyit dobtunk, de ha páratlant dobunk, akkor annyit veszítünk, amennyit dobtunk. Mi a nyereseményünk várható értéke és szórása?

**Megoldásvázlat** A nyeresemény  $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}$  valószínűséggel 2, 4, 6, -1, -3 vagy -5. Így várható értéke  $\frac{1}{2}$ , szórása  $\sqrt{\frac{179}{12}}$ .

**6. feladat** Egy erdei séta után a rajtunk található kullancsok száma Poisson eloszlású, 0.01 várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy 5 erdei séta során összesen egy kullancsot találunk magunkon?

**Megoldásvázlat** Használjuk, hogy független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege is Poisson eloszlású, ahol az összeg paramétere a paraméterek összege. Így, ha 1 erdei séta alatt a kullancsok számának eloszlása  $\text{POI}(0.01)$ , akkor 5 erdei séta alatt  $\text{POI}(0.05)$ . Így a keresett valószínűség  $0.05 \cdot e^{-0.05} \approx 0.048$ .

**7. feladat** Egy urnában 5 zöld és 3 fehér golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha 2 közülük zöld és 2 fehér, akkor megállunk. Különben visszarakjuk a golyókat az urnába és újra választunk 4 golyót. Az egészet mindaddig folytatjuk, amíg 4 húzott golyóból pontosan 2 zöld lesz. Mi a valószínűsége, hogy pontosan  $n$ -szer húzunk? Várhatóan hányszor húzunk?

**Megoldásvázlat** Ha  $X$  egy húzásnál a kihúzott zöld golyók száma, akkor  $X \sim \text{HIPERGEOM}(7, 5, 4)$ , így annak a valószínűsége, hogy 2 zöldet húzunk  $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{7}$ . Legyen  $Y$  a körök száma. Ekkor  $Y \sim \text{GEO}(\frac{3}{7})$ . Így annak a valószínűsége, hogy  $n$ -szer húzunk  $(\frac{4}{7})^{n-1} \cdot \frac{3}{7}$ , várható értéke  $\frac{7}{3}$ .

**8. feladat** Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 darab 50 000 Ft-os, és 100 darab 5 000 Ft-os nyeresemény van. A játékhoz 40 000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeresemény várható értéke a jegy árának felével egyezzen meg?

**Megoldásvázlat** A nyeresemény  $\frac{1}{40000}$  valószínűséggel 1 000 000 Ft,  $\frac{10}{40000}$  valószínűséggel 50 000 Ft,  $\frac{100}{40000}$  valószínűséggel 5 000 Ft, egyébként 0 Ft. Így a várható értéke 67.5 Ft, vagyis a jegy ára 125 Ft kell legyen.

**9. feladat** Egy iskolakirándulás során négy busz szállítja a diákokat. A négy buszban 40, 33, 25, illetve 50 diák utazik. Véletlenszerűen kiválasztunk egy diákot, legyen  $X$  az ő buszában utazó összes tanuló száma. A négy buszsofőr közül szintén egyet véletlenszerűen kiválasztunk, legyen  $Y$  az ő buszán utazó tanulók száma.

- Mit gondolunk,  $\mathbb{E}(X)$  vagy  $\mathbb{E}(Y)$  lesz nagyobb? Miért?
- Számoljuk ki  $\mathbb{E}(X)$  és  $\mathbb{E}(Y)$  értékét!
- Számoljuk ki  $X$  és  $Y$  szórását!

**Megoldásvázlat** (a) Ha diákat választunk, akkor nagyobb valószínűséggel választunk nagyobb buszról, így ekkor várunk nagyobb várható értéket, azaz  $\mathbb{E}(X) > \mathbb{E}(Y)$ .

(b)

$$\mathbb{E}(X) = \frac{40}{148} \cdot 40 + \frac{33}{148} \cdot 33 + \frac{25}{148} \cdot 25 + \frac{50}{148} \cdot 50 \approx 39.3$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4}(40 + 33 + 25 + 50) = 37$$

(c)

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{40}{148} \cdot 40^2 + \frac{33}{148} \cdot 33^2 + \frac{25}{148} \cdot 25^2 + \frac{50}{148} \cdot 50^2 \approx 1625.4$$

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{1625.4 - 39.3^2} \approx 9.1$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{4} \cdot 40^2 + \frac{1}{4} \cdot 33^2 + \frac{1}{4} \cdot 25^2 + \frac{1}{4} \cdot 50^2 = 1453.5$$

$$\mathbb{D}(Y) = \sqrt{1453.5 - 37^2} \approx 9.2$$

**10. feladat** Ha  $\mathbb{E}(X) = 1$  és  $\mathbb{D}^2(X) = 5$ , határozzuk meg a következő mennyiségeket:

(a)  $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$

(b)  $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$

**Megoldásvázlat** (a) 14

(b) 45