Matematika A3 építőmérnököknek 9. gyakorlat
Folytonons valószínűségi változók, sűrűségfüggvény, várható érték a folytonos esetben, az egyenletes és az exponenciális eloszlás

X folytonos valószínűségi változó **sűrűségfüggvénye** f, ha $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x$ minden $B \in \mathbb{R}$ halmazra.

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

X **eloszlásfüggvénye**: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- monoton nő
- $-\infty$-ben 0-hoz, ∞-ben 1-hez tart
- egy oldalról folytonos

Folytonos valószínűségi változó várható értéke, szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Nevezetes folytonos eloszások

Egyenletes X eloszlása egyenletes az (a, b) intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{, ha } x \in (a,b) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{, ha } x \in (a,b) \\ 1 & \text{, ha } b \leq x \end{cases}$$

Jele: $X \sim \mathrm{UNI}(a, b) \sim E(a, b)$. Várható értéke $\frac{a+b}{2}$, szórásnégyzete $\frac{(b-a)^2}{12}$.

Exponenciális X eloszlása exponenciális λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{, ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{, ha } x < 0 \end{cases}$$

Eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{, ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Jele: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$. Várható értéke $\frac{1}{\lambda}$, szórásnégyzete $\frac{1}{\lambda^2}$.
Fontos tulajdonsága az örökifjúság:

$$\mathbb{P}(X > s + t \,|\, X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Példa Legyen egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0 \\ x^2 & \text{, ha } x \in (0,1] \\ 1 & \text{, ha } 1 < x \end{cases}$

Ekkor, ha tetszőleges $a < b$ konstansokra az a kérdés, hogy mi annak a valószínűsége, hogy X ezek közötti értéket vesz fel:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

X sűrűségfüggvénye: $f(x) = F'(x) = 2x$, ha $x \in (0,1)$, egyébként $f(x) = 0$. Ebből várható értéke, illetve szórása integrálással számolható:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2} = \sqrt{\frac{1}{18}}.$$

1. feladat Tekintsük az $f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{, ha } x \in (0,1) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$ függvényt, ahol c ismeretlen konstans.

a) Mennyi a c értéke, ha az f egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?

b) Számítsa ki a $P(X \geq 0.5)$ valószínűséget!

c) Számítsa ki az $E(X)$ és $E\left(X^2\right)$ várható értékeket!

d) Határozza meg az eloszlásfüggvényt!

Megoldásvázlat

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ egyenletből $c = 3$.

b) $P(X \geq 0.5) = \int\limits_{0.5}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{8}$.

c) Definíció alapján $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{5}$.

d) Definíció alapján $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F(x) = 1$, ha $x > 1$. Ha $x \in (0,1]$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 3t^2\,\mathrm{d}t = x^3.$$

2. feladat Lehetnek-e az alábbi függvények eloszlásfüggvények? Ha igen, számoljuk ki a várható értéket!

a) $F(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{x+1} & \text{, ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{4} \cdot (4 - x) & \text{, ha } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{, ha } x > 2 \end{cases}$

Megoldásvázlat

a) Végtelenben 2-höz tart, így nem lehet eloszlásfüggvény.

b) Szükséges tulajdonságok ellenőrizhetők, ez egy eloszlásfüggvény. Várható értékhez először deriválással meghatározzuk a sűrűségfüggvényt: $f(x) = F'(x) = 1 - \frac{x}{2}$, ha $x \in (0,2)$ (egyébként $f(x) = 0$). Így

$$\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x - \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

3. feladat Egy információs vonalnál a várakozási idő exponenciális eloszlású 3 perc várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy ha már 2 perce várakozom, akkor a következő percben sorra kerülök?

Megoldásvázlat Legyen T a várakozási idő. Várható érték alapján a paramétere $\frac{1}{3}$. Örökifjú tulajdonság alapján a kérdezett valószínűség $\mathbb{P}(T < 1) = 1 - e^{-1/3}$.

4. feladat Tudjuk, hogy a busz 10:00 és 10:30 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.

a) Mi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?

b) Ha 10:15-kor még mindig várjuk a buszt, mi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?

Megoldásvázlat Legyen T a várakozási idő, ekkor $T \sim \mathrm{UNI}(0, 30)$.

a) $\mathbb{P}(T > 10) = \frac{2}{3}$

b) $\mathbb{P}(T > 25 \,|\, T > 15) = \frac{1}{3}$

5. feladat A buszmegállóba érkezésemkor megtudom, hogy az előző busz már legalább 3 perce elment. Mi a valószínűsége, hogy 5 percen belül megérkezik a buszom, ha a buszok követési ideje exponenciális eloszlású, 10 perc várható értékkel?

Megoldásvázlat Ha X a várakozási idő, akkor az örökifjú tulajdonság alapján a kérdezett valószínűség $\mathbb{P}(X < 5) = 1 - e^{-1/2}$.

6. feladat Annak valószínűsége, hogy egy telefonbeszélgetés legalább 5 percig tart, 0.3. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc után is tart még?

Megoldásvázlat Feltehető, hogy egy telefonbeszélgetés hossza exponenciális eloszlású, ez legyen T. Ekkor $\mathbb{P}(T \geq 5) = 0.3$, amiből az eloszlás paramétere $\lambda = -\frac{\ln 0.3}{5}$, amiből $\mathbb{P}(T \geq 10) = e^{-10\lambda} = 0.09$.

7. feladat Egy adott területen a földrengések erejei egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, 2.4 várható értékkel a Richter skálán. Mi a valószínűsége, hogy a következő

a) földrengés ereje meghaladja a 4-et?

b) két földrengés egyike sem lesz 4-nél erősebb?

Megoldásvázlat Legyen X, Y a következő két földrengés ereje.

a) $\mathbb{P}(X > 4) = e^{-5/3}$

b) $\mathbb{P}(X < 4, Y < 4) = \left(1 - e^{-5/3}\right)^2$

8. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0, 1)$, egyébként az értéke 0.

a) Mennyi a c konstans értéke?

b) Mi az X várható értéke?

Megoldásvázlat

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ egyenletből $c = 6$

b) Definíció alapján a várható érték $\frac{1}{2}$.

9. feladat A bankunkban várakozunk, ahol az átlagos kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, 5 perc várható értékkel. Ha csak egyvalaki van előttünk és őt éppen kiszolgálják, akkor mi a valószínűsége, hogy 4 percen belül sorra kerülünk,

a) ha éppen most érkeztünk?

b) ha már 4 perce várakozunk?

Megoldásvázlat

a) $1 - e^{-4/5}$

b) Örökifjú tulajdonság miatt $1 - e^{-4/5}$.

10. feladat Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{, ha } x \in (0,1), \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

Megoldásvázlat Legyen X a kereslet és T a keresett tartályméret. Ekkor $\mathbb{P}(T < X) = 0.01$. Integrálással adódik, hogy $(1-T)^5 = 0.01$, amiből $T = 1 - \sqrt[5]{0.01} \approx 0.6$.

11. feladat Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban ketté törünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbiknek az eloszlásfüggvénye?

Megoldásvázlat Az eloszlásfüggvény

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0, \\ \frac{2x}{l} & \text{, ha } x \in \left(0, \frac{l}{2}\right) \\ 1 & \text{, ha } x \geq 1, \end{cases}$$

azaz a rövidebb darab hossza egyenletes eloszlású a $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ intervallumon.

12. feladat Adott típusú elektomos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik? Hány óra garanciát vállaljanak, ha garanciális időn belül csak 5% garanciaigényt akarnak kielégíteni?

Megoldásvázlat Legyen X egy berendezés működési ideje. Ekkor $\mathbb{P}(X < 1000) = 0.02$, amiből az eloszlás paramétere $\lambda = \frac{-\ln 0.98}{1000} \approx 2.02 \cdot 10^{-5}$. A várható működési idő $\frac{1}{\lambda}$. Annak a valószínűsége, hogy ennél tovább működik egy berendezés: $\mathbb{P}(X > \frac{1}{\lambda}) = e^{-1}$.

Ha T a vállalt garanciaidő, akkor az kell, hogy $\mathbb{P}(X < T) = 0.05$, ahonnan $T = -\frac{0.95}{\lambda} \approx 2538$.