Matematika A3 építőmérnököknek 9. gyakorlat
Nevezetes diszkrét valószínűségi változók, diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórása

Hipergeometriai eloszlás Van N termékünk, amiből M selejtes. Kihúzunk n-et és legyen X a kihúzott selejtes termékek száma. Ekkor X hipergeometriai eloszlású N, M, n paraméterekkel. Jel: $X \sim \text{HIPERGEO}(N, M, n)$. Súlyfüggvénye:

$$p(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Várható érték Legyen X egy diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetségs értékei $x_1, x_2, \ldots$, súlyfüggvénye $p(x_k)$. Ekkor X **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i).$$

Vagyis a várható érték X lehetséges értékeinek súlyozott átlaga.

Várható értékre igazak az alábbi állítások:

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
- $\mathbb{E}(cX) = c \cdot \mathbb{E}(X)$,
- Ha X és Y független, akkor $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Szórás X valószínűségi változó **varianciája** vagy **szórásnégyzete** a várható értéktől való eltérés négyzetének várható értéke, azaz $\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$.

A **szórás** a variancia gyöke: $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Varianciára vonatkozó tételek:

- $\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$
- $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$
- Ha X és Y független, akkor $\text{Var}(Y_1 + Y_2) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Nevezetes eloszlások várható értéke, szórása

X eloszlása	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$
$\text{BER}(p)$	p	$p(1-p)$
$\text{BIN}(n,p)$	np	$np(1-p)$
$\text{POI}(\lambda)$	λ	λ
$\text{GEO}(p)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$\text{HIPERGEO}(N, M, n)$	$\frac{nM}{N}$	

1. feladat Egy dobozban 1 selejtes és 3 hibátlan termék található. Addig húzunk visszatevéssel, amíg a selejtet ki nem húzzuk. Mi a szükséges húzások számának várható értéke?

Megoldásvázlat Legyen X a húzások száma. Ekkor $X \sim \text{GEO}(1/4)$, így $\mathbb{E}(X) = 4$.

2. feladat A magyar kártyából kiveszünk két lapot. Adjuk meg a kihúzott piros lapok számának négyzetének várható értékét! (A magyar kártyában 32 lap van, ebből 8 piros.)

Megoldásvázlat Legyen X a kihúzott piros lapok száma. Ekkor $\mathbb{P}(X=0) = \frac{69}{124}$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{48}{124}$, $\mathbb{P}(X=2) = \frac{7}{124}$. Így $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \frac{69}{124} + 1^2 \cdot \frac{48}{124} + 2^2 \cdot \frac{7}{124} = \frac{19}{31}$.

3. feladat Tegyük fel, hogy $P(X=0) = 1 - P(X=1)$. Ha $\mathbb{E}(X) = 3\text{Var}(X)$ akkor mivel egyenlő $P(X=0)$?

Megoldásvázlat Legyen $p = P(X = 1)$. Ekkor $X \sim \text{BER}(p)$, így az egyenletből $p = 3p(1 - p)$, vagyis $p = \frac{2}{3}$, azaz $P(X = 0) = \frac{1}{3}$.

4. feladat Egy családban addig születik gyerek, amíg az fiú nem lesz vagy a gyerekek száma el nem éri a hármat. Mi a gyerekek várható száma és szórása egy ilyen családban?

Megoldásvázlat Legyen X a gyerekek száma. Ekkor $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{4}$. Így $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{4}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{15}{4}$, $\text{Var}(X) = \frac{11}{16}$, $\mathbb{D}(X) = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

5. feladat Feldobunk egy kockát. Ha páros az eredmény, akkor annyi eurót nyerünk, amennyit dobtunk, de ha páratlant dobunk, akkor annyit veszítünk, amennyit dobtunk. Mi a nyereményünk várható értéke és szórása?

Megoldásvázlat A nyeremény $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}$ valószínűséggel 2, 4, 6, -1, -3 vagy -5. Így várható értéke $\frac{1}{2}$, szórása $\sqrt{\frac{179}{12}}$.

6. feladat Egy erdei séta után a rajtunk található kullancsok száma Poisson eloszlású, 0.01 várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy 5 erdei séta során összesen egy kullancsot találunk magunkon?

Megoldásvázlat Használjuk, hogy független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege is Poisson eloszlású, ahol az összeg paramétere a paraméterek összege. Így, ha 1 erdei séta alatt a kullancsok számának eloszlása POI(0.01), akkor 5 erdei séta alatt POI(0.05). Így a keresett valószínűség $0.05 \cdot e^{-0.05} \approx 0.048$.

7. feladat Egy urnában 5 zöld és 3 fehér golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha 2 közülük zöld és 2 fehér, akkor megállunk. Különben visszarakjuk a golyókat az urnába és újra választunk 4 golyót. Az egészet mindaddig folytatjuk, amíg 4 húzott golyóból pontosan 2 zöld lesz. Mi a valószínűsége, hogy pontosan n-szer húzunk? Várhatóan hányszor húzunk?

Megoldásvázlat Ha X egy húzásnál a kihúzott zöld golyók száma, akkor $X \sim \text{HIPERGEO}(7, 5, 4)$, így annak a valószínűsége, hogy 2 zöldet húzunk $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{7}$. Legyen Y a körök száma. Ekkor $Y \sim \text{GEO}\left(\frac{3}{7}\right)$. Így annak a valószínűsége, hogy n-szer húzunk $\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{7}$, várható értéke $\frac{7}{3}$.

8. feladat Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 darab 50 000 Ft-os, és 100 darab 5 000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának felével egyezzen meg?

Megoldásvázlat A nyeremény $\frac{1}{40000}$ valószínűséggel 1 000 000 Ft, $\frac{10}{40000}$ valószínűséggel 50 000 Ft, $\frac{100}{40000}$ valószínűséggel 5 000 Ft, egyébként 0 Ft. Így a várható értéke 67.5 Ft, vagyis a jegy ára 125 Ft kell legyen.

9. feladat Egy iskolakirándulás során négy busz szállítja a diákokat. A négy buszban 40, 33, 25, illetve 50 diák utazik. Vétlenszerűen kiválasztunk egy diákot, legyen X az ő buszában utazó összes tanuló száma. A négy buszsofőr közül szintén egyet véletlenszerűen kiválasztunk, legyen Y az ő buszán utazó tanulók száma.

(a) Mit gondolunk, $\mathbb{E}(X)$ vagy $\mathbb{E}(Y)$ lesz nagyobb? Miért?
(b) Számoljuk ki $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét!
(c) Számoljuk ki X és Y szórását!

Megoldásvázlat (a) Ha diákot választunk, akkor nagyobb valószínűséggel választunk nagyobb buszról, így ekkor várunk nagyobb várható értéket, azaz $\mathbb{E}(X) > \mathbb{E}(Y)$.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{40}{148} \cdot 40 + \frac{33}{148} \cdot 33 + \frac{25}{148} \cdot 25 + \frac{50}{148} \cdot 50 \approx 39.3 \\
\mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{4}(40 + 33 + 25 + 50) = 37
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \frac{40}{148} \cdot 40^2 + \frac{33}{148} \cdot 33^2 + \frac{25}{148} \cdot 25^2 + \frac{50}{148} \cdot 50^2 \approx 1625.4 \\
\mathbb{D}(X) &= \sqrt{1625.4 - 39.3^2} \approx 9.1 \\
\mathbb{E}(Y^2) &= \frac{1}{4} \cdot 40^2 + \frac{1}{4} \cdot 33^2 + \frac{1}{4} \cdot 25^2 + \frac{1}{4} \cdot 50^2 = 1453.5 \\
\mathbb{D}(Y) &= \sqrt{1453.5 - 37^2} \approx 9.2
\end{aligned}$$

10. feladat Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg a következő mennyiségeket:

(a) $\mathbb{E}\left[(2 + X)^2\right]$

(b) $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$

Megoldásvázlat (a) 14

(b) 45