Matematika A3 építőmérnököknek 9. gyakorlat
Nevezetes diszkrét valószínűségi változók, diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórása

Hipergeometriai eloszlás Van N termékünk, amiből M selejtes. Kihúzunk n-et és legyen X a kihúzott selejtes termékek száma. Ekkor X hipergeometriai eloszlású N, M, n paraméterekkel. Jel: $X \sim \text{HIPERGEO}(N, M, n)$. Súlyfüggvénye:

$$p(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Várható érték Legyen X egy diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetségs értékei $x_1, x_2, \dots,$ súlyfüggvénye $p(x_k)$. Ekkor X **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i).$$

Vagyis a várható érték X lehetséges értékeinek súlyozott átlaga.

Várható értékre igazak az alábbi állítások:

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
- $\mathbb{E}(cX) = c \cdot \mathbb{E}(X)$,
- Ha X és Y független, akkor $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Szórás X valószínűségi változó **varianciája** vagy **szórásnégyzete** a várható értéktől való eltérés négyzetének várható értéke, azaz $\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$.

A **szórás** a variancia gyöke: $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Varianciára vonatkozó tételek:

- $\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$
- $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$
- Ha X és Y független, akkor $\text{Var}(Y_1 + Y_2) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Nevezetes eloszlások várható értéke, szórása

X eloszlása	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$
$\text{BER}(p)$	p	$p(1-p)$
$\text{BIN}(n,p)$	np	$np(1-p)$
$\text{POI}(\lambda)$	λ	λ
$\text{GEO}(p)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$\text{HIPERGEO}(N,M,n)$	$\frac{nM}{N}$	

1. feladat Egy dobozban 1 selejtes és 3 hibátlan termék található. Addig húzunk visszatevéssel, amíg a selejtet ki nem húzzuk. Mi a szükséges húzások számának várható értéke?

2. feladat A magyar kártyából kiveszünk két lapot. Adjuk meg a kihúzott piros lapok számának négyzetének várható értékét! (A magyar kártyában 32 lap van, ebből 8 piros.)

3. feladat Tegyük fel, hogy $P(X=0) = 1 - P(X=1)$. Ha $\mathbb{E}(X) = 3\text{Var}(X)$ akkor mivel egyenlő $P(X=0)$?

4. feladat Egy családban addig születik gyerek, amíg az fiú nem lesz vagy a gyerekek száma el nem éri a hármat. Mi a gyerekek várható száma és szórása egy ilyen családban?

5. feladat Feldobunk egy kockát. Ha páros az eredmény, akkor annyi eurót nyerünk, amennyit dobtunk, de ha páratlant dobunk, akkor annyit veszítünk, amennyit dobtunk. Mi a nyereményünk várható értéke és szórása?

6. feladat Egy erdei séta után a rajtunk található kullancsok száma Poisson eloszlású, 0.01 várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy 5 erdei séta során összesen egy kullancsot találunk magunkon?

7. feladat Egy urnában 5 zöld és 3 fehér golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha 2 közülük zöld és 2 fehér, akkor megállunk. Különben visszarakjuk a golyókat az urnába és újra választunk 4 golyót. Az egészet mindaddig folytatjuk, amíg 4 húzott golyóból pontosan 2 zöld lesz. Mi a valószínűsége, hogy pontosan n-szer húzunk? Várhatóan hányszor húzunk?

8. feladat Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 darab 50 000 Ft-os, és 100 darab 5 000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának felével egyezzen meg?

9. feladat Egy iskolakirándulás során négy busz szállítja a diákokat. A négy buszban 40, 33, 25, illetve 50 diák utazik. Vétlenszerűen kiválasztunk egy diákot, legyen X az ő buszában utazó összes tanuló száma. A négy buszsofőr közül szintén egyet véletlenszerűen kiválasztunk, legyen Y az ő buszán utazó tanulók száma.

(a) Mit gondolunk, $\mathbb{E}(X)$ vagy $\mathbb{E}(Y)$ lesz nagyobb? Miért?
(b) Számoljuk ki $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét!
(c) Számoljuk ki X és Y szórását!

10. feladat Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg a következő mennyiségeket:

(a) $\mathbb{E}\left[(2+X)^2\right]$
(b) $\mathbb{D}^2(4+3X)$