Matematika A3 építőmérnököknek 10. gyakorlat
További folytonos valószínűségi változók, gyakorlás a zh-ra

1. feladat A buszmegállóba érkezésemkor megtudom, hogy az előző busz már legalább 3 perce elment. Mi a valószínűsége, hogy 5 percen belül megérkezik a buszom, ha a buszok követési ideje exponenciális eloszlású, 10 perc várható értékkel?

Megoldásvázlat Ha X a várakozási idő, akkor az örökifjú tulajdonság alapján a kérdezett valószínűség $\mathbb{P}(X < 5) = 1 - e^{-1/2}$.

2. feladat Annak valószínűsége, hogy egy telefonbeszélgetés legalább 5 percig tart, 0.3. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc után is tart még?

Megoldásvázlat Feltehető, hogy egy telefonbeszélgetés hossza exponenciális eloszlású, ez legyen T. Ekkor $\mathbb{P}(T \geq 5) = 0.3$, amiből az eloszlás paramétere $\lambda = -\frac{\ln 0.3}{5}$, amiből $\mathbb{P}(T \geq 10) = e^{-10\lambda} = 0.09$.

3. feladat Egy adott területen a földrengések erejei egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, 2.4 várható értékkel a Richter skálán. Mi a valószínűsége, hogy a következő

a) földrengés ereje meghaladja a 4-et?

b) két földrengés egyike sem lesz 4-nél erősebb?

Megoldásvázlat Legyen X, Y a következő két földrengés ereje.

a) $\mathbb{P}(X > 4) = e^{-5/3}$

b) $\mathbb{P}(X < 4, Y < 4) = \left(1 - e^{-5/3}\right)^2$

4. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0,1)$, egyébként az értéke 0.

a) Mennyi a c konstans értéke?

b) Mi az X várható értéke?

Megoldásvázlat

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ egyenletből $c = 6$

b) Definíció alapján a várható érték $\frac{1}{2}$.

5. feladat A bankunkban várakozunk, ahol az átlagos kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, 5 perc várható értékkel. Ha csak egyvalaki van előttünk és őt éppen kiszolgálják, akkor mi a valószínűsége, hogy 4 percen belül sorra kerülünk,

a) ha éppen most érkeztünk?

b) ha már 4 perce várakozunk?

Megoldásvázlat

a) $1 - e^{-4/5}$

b) Örökifjú tulajdonság miatt $1 - e^{-4/5}$.

6. feladat Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{, ha } x \in (0,1), \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

Megoldásvázlat Legyen X a kereslet és T a keresett tartályméret. Ekkor $\mathbb{P}(T < X) = 0.01$. Integrálással adódik, hogy $(1-T)^5 = 0.01$, amiből $T = 1 - \sqrt[5]{0.01} \approx 0.6$.

7. feladat Adott típusú elektomos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik? Hány óra garanciát vállaljanak, ha garanciális időn belül csak 5% garanciaigényt akarnak kielégíteni?

Megoldásvázlat Legyen X egy berendezés működési ideje. Ekkor $\mathbb{P}(X < 1000) = 0.02$, amiből az eloszlás paramétere $\lambda = \frac{-\ln 0.98}{1000} \approx 2.02 \cdot 10^{-5}$. A várható működési idő $\frac{1}{\lambda}$. Annak a valószínűsége, hogy ennél tovább működik egy berendezés: $\mathbb{P}(X > \frac{1}{\lambda}) = e^{-1}$.

Ha T a vállalt garanciaidő, akkor az kell, hogy $\mathbb{P}(X < T) = 0.05$, ahonnan $T = -\frac{0.95}{\lambda} \approx 2538$.

8. feladat Egy dobozban 3 új és 2 használt teniszlabda van. Találomra kiveszünk egyet és játszunk vele, majd visszatesszük a dobozba. A következő játékban (ismét találomra kivéve egyet) milyen valószínűséggel játszunk majd új labdával?

Megoldásvázlat Összes lehetőség száma $5 \cdot 5 = 25$. Azon lehetőségek száma, amikor új labdával játszunk $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$. Tehát a valószínűség: $\frac{12}{25}$.

9. feladat Két férfi és három nő ül egy padon. Mi a valószínűsége, hogy nemek szerint felváltva ülnek?

Megoldásvázlat $\frac{3! \cdot 2!}{5!} = \frac{1}{10}$.

10. feladat Egy érmét háromszor feldobunk. Feltéve, hogy van fej a dobások között, mi a valószínűsége, hogy írás is van?

Megoldásvázlat 7 olyan elemi esemény van, amikor dobtunk fejet, ebből 6 esetben dobtunk írást is. Így a keresett valószínűség $\frac{6}{7}$.

11. feladat Van a zsebünkben egy szabályos és egy olyan pénzérme, amelynek mindkét oldala fej. Kivesszük az egyiket és feldobjuk kétszer, az eredmény mindkét esetben fej. Mi a valószínűsége, hogy a hamissal dobtunk?

Megoldásvázlat Legyen A az az esemény, hogy a szabálytalan érmével dobálunk és B az az esemény, hogy mindkét dobás fej. Ekkor Bayes-tételt használva

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{1/2}{1/2 + 1/8} = \frac{4}{5}.$$

12. feladat Az A érme feldobásakor 0.4 valószínűséggel kapunk fejet, a B érme feldobásakor ugyanez a valószínűség 0.7. E két érme közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk, és 10-szer feldobunk.

a) Függetlenek-e e dobások kimenetelei egymástól?

b) Mi a valószínűsége, hogy pontosan 7 dobás lesz fej?

c) Feltéve, hogy az első dobás fej, mi a valószínűsége, hogy az A érmével dobunk?

d) Feltéve, hogy az első dobás fej, mi a valószínűsége, hogy összesen 7 dobás lesz fej?

Megoldásvázlat Legyen A és B az az esemény, hogy A vagy B érmével dobunk. E, F legyen az az esemény, hogy az első, illetve a második dobás fej. C legyen az, hogy pontosan 7 fejet dobtunk.

a) $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) = 0.55$ (teljes valószínűség tételével A, B teljes eseményrendszerre nézve). Hasonlóan $\mathbb{P}(E \cap F) = 0.325 \neq \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F)$, így nem függetlenek.

b) Teljes valószínűség tételével (A, B teljes eseményrendszerre nézve) és használva, hogy a fejek száma binomiális eloszlású $n = 10$ és az érmétől függően $p = 0.4$ vagy $p = 0.7$ paraméterekkel: $\mathbb{P}(C) \approx 0.15$.

c) Bayes-tétellel: $\mathbb{P}(A|E) = \frac{4}{11}$.

d) $\mathbb{P}(C \cap E)$-t teljes valószínűség tétellel számolható. Ezután Bayes-tételből $\mathbb{P}(C|E)$ meghatározható.

13. feladat Tegyük fel, hogy $P(X = 0) = 1 - P(X = 1)$. Ha $\mathbb{E}(X) = 3\mathrm{Var}(X)$ akkor mivel egyenlő $P(X = 0)$?

Megoldásvázlat Legyen $p = P(X = 1)$. Ekkor $X \sim \mathrm{BER}(p)$, így az egyenletből $p = 3p(1 - p)$, vagyis $p = \frac{2}{3}$, azaz $P(X = 0) = \frac{1}{3}$.

14. feladat Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 darab 50 000 Ft-os, és 100 darab 5 000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának felével egyezzen meg?

Megoldásvázlat A nyeremény $\frac{1}{40000}$ valószínűséggel 1 000 000 Ft, $\frac{10}{40000}$ valószínűséggel 50 000 Ft, $\frac{100}{40000}$ valószínűséggel 5 000 Ft, egyébként 0 Ft. Így a várható értéke 67.5 Ft, vagyis a jegy ára 125 Ft kell legyen.