

Matematika A3 építőmérnököknek 10. gyakorlat

Folytonos valószínűségi változók, sűrűségfüggvény, várható érték a folytonos esetben, az egyenletes és az exponenciális eloszlás

X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f , ha $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) dx$ minden $B \in \mathbb{R}$ halmazra.

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

X eloszlásfüggvénye: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- monoton nő
- $-\infty$ -ben 0-hoz, ∞ -ben 1-hez tart
- egy oldalról folytonos

Folytonos valószínűségi változó várható értéke, szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \right)^2$$

Nevezetes folytonos eloszlások

Egyenletes X eloszlása egyenletes az (a, b) intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \text{ ha } x \in (a, b) \\ 0 & \text{ egyébként} \end{cases}$$

Eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \text{ ha } x \in (a, b) \\ 1 & , \text{ ha } b \leq x \end{cases}$$

Jele: $X \sim \text{UNI}(a, b) \sim E(a, b)$. Várható értéke $\frac{a+b}{2}$, szórásnégyzete $\frac{(b-a)^2}{12}$.

Exponenciális X eloszlása exponenciális λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \text{ ha } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ ha } x < 0 \end{cases}$$

Eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , \text{ ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Jele: $X \sim \text{EXP}(\lambda)$. Várható értéke $\frac{1}{\lambda}$, szórásnégyzete $\frac{1}{\lambda^2}$.

Fontos tulajdonsága az örökifjúság:

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Példa Legyen egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \leq 0 \\ x^2 & , \text{ ha } x \in (0, 1] \\ 1 & , \text{ ha } 1 < x \end{cases}$

Ekkor, ha tetszőleges $a < b$ konstansokra az a kérdés, hogy mi annak a valószínűsége, hogy X ezek közötti értéket vesz fel:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

X sűrűségfüggvénye: $f(x) = F'(x) = 2x$, ha $x \in (0, 1)$, egyébként $f(x) = 0$. Ebből várható értéke, illetve szórása integrálással számolható:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2} = \sqrt{\frac{1}{18}}.$$

1. feladat Tekintsük az $f(x) = \begin{cases} cx^2 & , \text{ ha } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{ egyébként} \end{cases}$ függvényt, ahol c ismeretlen konstans.

- Mennyi a c értéke, ha az f egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?
- Számítsa ki a $P(X \geq 0.5)$ valószínűséget!
- Számítsa ki az $E(X)$ és $E(X^2)$ várható értékeket!
- Határozza meg az eloszlásfüggvényt!

Megoldásvázlat

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ egyenletből $c = 3$.

b) $P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} f(x) dx = \frac{7}{8}$.

c) Definíció alapján $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{5}$.

d) Definíció alapján $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F(x) = 1$, ha $x > 1$. Ha $x \in (0, 1]$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x 3t^2 dt = x^3.$$

2. feladat Lehetnek-e az alábbi függvények eloszlásfüggvények? Ha igen, számoljuk ki a várható értéket!

a) $F(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{x+1} & , \text{ ha } x \geq 0, \\ 0 & , \text{ egyébként} \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{4} \cdot (4 - x) & , \text{ ha } 0 < x \leq 2, \\ 1 & , \text{ ha } x > 2 \end{cases}$

Megoldásvázlat

a) Végtelenben 2-höz tart, így nem lehet eloszlásfüggvény.

b) Szükséges tulajdonságok ellenőrizhetők, ez egy eloszlásfüggvény. Várható értékhez először deriválással meghatározzuk a sűrűségfüggvényt: $f(x) = F'(x) = 1 - \frac{x}{2}$, ha $x \in (0, 2)$ (egyébként $f(x) = 0$). Így

$$\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x - \frac{x^2}{2} dx = \frac{2}{3}.$$

3. feladat Egy információs vonalnál a várakozási idő exponenciális eloszlású 3 perc várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy ha már 2 perce várok, akkor a következő percben sorra kerülök?

Megoldásvázlat Legyen T a várakozási idő. Várható érték alapján a paramétere $\frac{1}{3}$. Örökifjú tulajdonság alapján a kért valószínűség $\mathbb{P}(T < 1) = 1 - e^{-1/3}$.

4. feladat Tudjuk, hogy a busz 10:00 és 10:30 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.

- Mi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?
- Ha 10:15-kor még mindig várjuk a buszt, mi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?

Megoldásvázlat Legyen T a várakozási idő, ekkor $T \sim \text{UNI}(0, 30)$.

- $\mathbb{P}(T > 10) = \frac{2}{3}$
- $\mathbb{P}(T > 25 | T > 15) = \frac{1}{3}$

5. feladat A buszmegállóba érkezésemkor megtudom, hogy az előző busz már legalább 3 percet elment. Mi a valószínűsége, hogy 5 percen belül megérkezik a buszom, ha a buszok követési ideje exponenciális eloszlású, 10 perc várható értékkel?

Megoldásvázlat Ha X a várakozási idő, akkor az örökifjú tulajdonság alapján a kért valószínűség $\mathbb{P}(X < 5) = 1 - e^{-1/2}$.

6. feladat Annak valószínűsége, hogy egy telefonbeszélgetés legalább 5 percig tart, 0.3. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc után is tart még?

Megoldásvázlat Feltehető, hogy egy telefonbeszélgetés hossza exponenciális eloszlású, ez legyen T . Ekkor $\mathbb{P}(T \geq 5) = 0.3$, amiből az eloszlás paramétere $\lambda = -\frac{\ln 0.3}{5}$, amiből $\mathbb{P}(T \geq 10) = e^{-10\lambda} = 0.09$.

7. feladat Egy adott területen a földrengések ereje egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, 2.4 várható értékkel a Richter skálán. Mi a valószínűsége, hogy a következő

- földrengés ereje meghaladja a 4-et?
- két földrengés egyike sem lesz 4-nél erősebb?

Megoldásvázlat Legyen X, Y a következő két földrengés ereje.

- $\mathbb{P}(X > 4) = e^{-5/3}$
- $\mathbb{P}(X < 4, Y < 4) = (1 - e^{-5/3})^2$

8. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0, 1)$, egyébként az értéke 0.

- Mennyi a c konstans értéke?
- Mi az X várható értéke?

Megoldásvázlat

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ egyenletből $c = 6$
- Definíció alapján a várható érték $\frac{1}{2}$.

9. feladat A bankunkban várakozunk, ahol az átlagos kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, 5 perc várható értékkel. Ha csak egyvalaki van előttünk és őt éppen kiszolgálják, akkor mi a valószínűsége, hogy 4 percen belül sorra kerülünk,

- a) ha éppen most érkeztünk?
- b) ha már 4 perce várakozunk?

Megoldásvázlat

- a) $1 - e^{-4/5}$
- b) Örökifjú tulajdonság miatt $1 - e^{-4/5}$.

10. feladat Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & , \text{ ha } x \in (0, 1), \\ 0 & , \text{ egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

Megoldásvázlat Legyen X a kereslet és T a keresett tartálméret. Ekkor $\mathbb{P}(T < X) = 0.01$. Integrálással adódik, hogy $(1 - T)^5 = 0.01$, amiből $T = 1 - \sqrt[5]{0.01} \approx 0.6$.

11. feladat Egy l hosszúságú ropit taláalomra választott pontban ketté törünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbiknek az eloszlásfüggvénye?

Megoldásvázlat Az eloszlásfüggvény

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \leq 0, \\ \frac{2x}{l} & , \text{ ha } x \in (0, \frac{l}{2}) \\ 1 & , \text{ ha } x \geq \frac{l}{2}, \end{cases}$$

azaz a rövidebb darab hossza egyenletes eloszlású a $(0, \frac{l}{2})$ intervallumon.

12. feladat Adott típusú elektomos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik? Hány óra garanciát vállaljanak, ha garanciális időn belül csak 5% garanciaigényt akarnak kielégíteni?

Megoldásvázlat Legyen X egy berendezés működési ideje. Ekkor $\mathbb{P}(X < 1000) = 0.02$, amiből az eloszlás paramétere $\lambda = \frac{-\ln 0.98}{1000} \approx 2.02 \cdot 10^{-5}$. A várható működési idő $\frac{1}{\lambda}$. Annak a valószínűsége, hogy ennél tovább működik egy berendezés: $\mathbb{P}(X > \frac{1}{\lambda}) = e^{-1}$.

Ha T a vállalt garanciaidő, akkor az kell, hogy $\mathbb{P}(X < T) = 0.05$, ahonnan $T = -\frac{0.95}{\lambda} \approx 2538$.