Matematika A3 építőmérnököknek 11. gyakorlat
Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség, Nagy Számok Gyenge Törvénye

Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség

Markov-egyenlőtlenség Ha X egy nemnegatív valószínűségi változó, $a > 0$ konstans, akkor

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség Ha X várható értéke m, szórásnégyzete s^2, akkor minden $k > 0$ konstansra

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq k) \leq \frac{s^2}{k^2}.$$

1. feladat Egy zh-n a dolgozatok átlaga 40% volt.

a) Adjunk felső becslést azok arányára, akik legalább 80%-ot értek el!

b) Adjunk jobb becslést, ismerve, hogy a szórás 20%!

Megoldásvázlat Legyen X egy véletlen dolgozat eredménye.

a) Markov-egyenlőtlenséggel $\mathbb{P}(X \geq 80) \leq \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$.

b) Csebisev-egyenlőtlenséggel $\mathbb{P}(X \geq 80) \leq \mathbb{P}(|X - 40| \geq 40) \leq \frac{20^2}{40^2} = \frac{1}{4}$.

2. feladat Egy pénzérmével a fejdobás valószínűsége 0.2. Adjunk minél jobb felső becslést annak valószínűségére, hogy 20 dobásból legalább 16 fej lesz! Mi lenne a pontos érték?

Megoldásvázlat Legyen X a fejek száma. Ekkor $X \sim \mathrm{BIN}(20, 0.2)$, így $\mathbb{E}(X) = 4$, $\mathrm{Var}(X) = 3.2$.
Markov-egyenlőtlenséggel: $\mathbb{P}(X \geq 16) \leq \frac{1}{4}$.
Csebisev-egyenlőtlenséggel: $\mathbb{P}(X \geq 16) \leq \mathbb{P}(|X - 4| \geq 12) \leq \frac{3.2}{144} \approx 0.022$.
Markov-egyenlőtlenség trükkösen: $\mathbb{P}(X \geq 16) \leq \mathbb{P}(2^X \geq 2^{16}) \leq \frac{1.2^{20}}{2^{16}} \approx 0.0006$.
Pontosan (binomiális súlyfüggvényt használva): $\mathbb{P}(X \geq 16) = 1.38 \cdot 10^{-8}$.

3. feladat Egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvényére $F(0) = 0$, $F(10) = 0.8$.

a) Adjunk alsó becslést $\mathbb{E}(X)$-re!

b) Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X) = 5$. Adjunk becslést $\mathrm{Var}(X)$-re!

Megoldásvázlat

a) X nemnegatív $F(0) = 0$ miatt. Így Markov-egyenlőtlenséggel $\mathbb{E}(X) \geq 10\mathbb{P}(X \geq 10) = 2$.

b) Csebisevvel: $\mathrm{Var}(X) \geq 25\mathbb{P}(|X - 5| \geq 5) = 5$.

4. feladat Egy szabályos érmét feldobunk 100-szor. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a fejdobások száma 40 és 60 közé esik! Megjegyzés: a valódi valószínűség 95% körül van.

Megoldásvázlat Legyen X a fejek száma. Csebisevvel: $\mathbb{P}(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{1}{4}$, így a keresett valószínűség legalább $\frac{3}{4}$.

5. feladat Feldobok 100 dobókockát. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a számok összege 335 és 365 közé esik

Megoldásvázlat Legyen X a dobott számok összege. Ekkor $\mathbb{E}(X) = 350$, $\mathrm{Var}(X) = 100 \cdot \frac{35}{12} = \frac{875}{3}$. Ekkor használhatjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget:

$$\mathbb{P}(|X - 350| \geq 15) \leq \frac{35}{27},$$

amiből a kérdezett valószínűségre csak egy triviális határ adódik.

Nagy Számok Gyenge Törvénye Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értéke $\mathbb{E}(X_i) = m$, szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(X_i) = s^2$. Jelölje S_n az első n valószínűségi változó összegét, azaz $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ekkor tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. feladat Legyen $g : [0,1] \to [0,1]$ egy integrálható függvény és válaszuk véletlenül (egyenletesen) $P_1, P_2, \ldots$ pontokat a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten. Legyen X_i az a valószínűségi változó, ami 1, ha P_i pont a $g(x)$ függvény görbéje alatt van és 0, ha felette. Hova tart $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$?

Megoldásvázlat A nagy számok gyenge törvénye alapján az érték $\mathbb{E}(X_i)$-hez tart. $X_i \sim \mathrm{BER}(p)$, ahol p annak a valószínűsége, hogy egy pont a görbe alá esik, ami épp $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Így a határérték $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

7. feladat Legyen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ egy korlátos, integrálható függvény és $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók $\mathrm{UNI}[0,1]$ eloszlással. Legyen $Y_i = g(X_i)$ minden $i = 1, 2, \ldots$ esetén. Hova konvergál Y_i valószínűségi változók átlaga?

Megoldásvázlat Nagy számok gyenge törvénye alapján az átlag az Y_i változók várható értékéhez tart. Mivel X_i sűrűségfüggvénye: $f_X(x) = 1$, ha $x \in [0,1]$ és $f_X(x) = 0$ egyébként, így

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(g(X_i)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tehát az átlag most is a függvény integráljához tart.