Matematika A3 építőmérnököknek 11. gyakorlat
Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség, Nagy Számok Gyenge Törvénye

Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség

Markov-egyenlőtlenség Ha X egy nemnegatív valószínűségi változó, $a > 0$ konstans, akkor

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség Ha X várható értéke m, szórásnégyzete s^2, akkor minden $k > 0$ konstansra

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq k) \leq \frac{s^2}{k^2}.$$

1. feladat Egy zh-n a dolgozatok átlaga 40% volt.

a) Adjunk felső becslést azok arányára, akik legalább 80%-ot értek el!

b) Adjunk jobb becslést, ismerve, hogy a szórás 20%!

2. feladat Egy pénzérmével a fejdobás valószínűsége 0.2. Adjunk minél jobb felső becslést annak valószínűségére, hogy 20 dobásból legalább 16 fej lesz! Mi lenne a pontos érték?

3. feladat Egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvényére $F(0) = 0$, $F(10) = 0.8$.

a) Adjunk alsó becslést $\mathbb{E}(X)$-re!

b) Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X) = 5$. Adjunk becslést $\mathrm{Var}(X)$-re!

4. feladat Egy szabályos érmét feldobunk 100-szor. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a fejdobások száma 40 és 60 közé esik! Megjegyzés: a valódi valószínűség 95% körül van.

5. feladat Feldobok 100 dobókockát. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a számok összege 335 és 365 közé esik

Nagy Számok Gyenge Törvénye Legyenek $X_1, X_2, X_3, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értéke $\mathbb{E}(X_i) = m$, szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(X_i) = s^2$. Jelölje S_n az első n valószínűségi változó összegét, azaz $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ekkor tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

6. feladat Legyen $g : [0,1] \to [0,1]$ egy integrálható függvény és válaszuk véletlenül (egyenletesen) $P_1, P_2, \dots$ pontokat a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten. Legyen X_i az a valószínűségi változó, ami 1, ha P_i pont a $g(x)$ függvény görbéje alatt van és 0, ha felette. Hova tart $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$?

7. feladat Legyen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ egy korlátos, integrálható függvény és $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók UNI$[0,1]$ eloszlással. Legyen $Y_i = g(X_i)$ minden $i = 1, 2, \dots$ esetén. Hova konvergál Y_i valószínűségi változók átlaga?