Matematika A3 építőmérnököknek 11. gyakorlat
Folytonos valószínűségi változók, Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség

1. feladat A buszmegállóba érkezésemkor megtudom, hogy az előző busz már legalább 3 perce elment. Mi a valószínűsége, hogy 5 percen belül megérkezik a buszom, ha a buszok követési ideje exponenciális eloszlású, 10 perc várható értékkel?

Megoldásvázlat Ha X a várakozási idő, akkor az örökifjú tulajdonság alapján a kérdezett valószínűség $\mathbb{P}(X < 5) = 1 - e^{-1/2}$.

2. feladat Annak valószínűsége, hogy egy telefonbeszélgetés legalább 5 percig tart, 0.3. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc után is tart még?

Megoldásvázlat Feltehető, hogy egy telefonbeszélgetés hossza exponenciális eloszlású, ez legyen T. Ekkor $\mathbb{P}(T \geq 5) = 0.3$, amiből az eloszlás paramétere $\lambda = -\frac{\ln 0.3}{5}$, amiből $\mathbb{P}(T \geq 10) = e^{-10\lambda} = 0.09$.

3. feladat Egy adott területen a földrengések erejei egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, 2.4 várható értékkel a Richter skálán. Mi a valószínűsége, hogy a következő

a) földrengés ereje meghaladja a 4-et?

b) két földrengés egyike sem lesz 4-nél erősebb?

Megoldásvázlat Legyen X, Y a következő két földrengés ereje.

a) $\mathbb{P}(X > 4) = e^{-5/3}$

b) $\mathbb{P}(X < 4, Y < 4) = \left(1 - e^{-5/3}\right)^2$

4. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0,1)$, egyébként az értéke 0.

a) Mennyi a c konstans értéke?

b) Mi az X várható értéke és szórása?

Megoldásvázlat

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ egyenletből $c = 6$

b) Definíció alapján a várható érték $\frac{1}{2}$, a szórás $\sqrt{0.05}$.

5. feladat A bankunkban várakozunk, ahol az átlagos kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, 5 perc várható értékkel. Ha csak egyvalaki van előttünk és őt éppen kiszolgálják, akkor mi a valószínűsége, hogy 4 percen belül sorra kerülünk,

a) ha éppen most érkeztünk?

b) ha már 4 perce várakozunk?

Megoldásvázlat

a) $1 - e^{-4/5}$

b) Örökifjú tulajdonság miatt $1 - e^{-4/5}$.

6. feladat Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{, ha } x \in (0,1), \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

Megoldásvázlat Legyen X a kereslet és T a keresett tartályméret. Ekkor $\mathbb{P}(T < X) = 0.01$. Integrálással adódik, hogy $(1-T)^5 = 0.01$, amiből $T = 1 - \sqrt[5]{0.01} \approx 0.6$.

7. feladat Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban ketté törünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbiknek az eloszlásfüggvénye?

Megoldásvázlat Az eloszlásfüggvény

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \le 0, \\ \frac{2x}{l} & \text{, ha } x \in \left(0, \frac{l}{2}\right) \\ 1 & \text{, ha } x \ge 1, \end{cases}$$

azaz a rövidebb darab hossza egyenletes eloszlású a $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ intervallumon.

Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség (ez már nem része a zárthelyi anyagának)

Markov-egyenlőtlenség Ha X egy nemnegatív valószínűségi változó, $a > 0$ konstans, akkor

$$\mathbb{P}(X \ge a) \le \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség Ha X várható értéke m, szórásnégyzete s^2, akkor minden $k > 0$ konstansra

$$\mathbb{P}(|X - m| \ge k) \le \frac{s^2}{k^2}.$$

8. feladat Egy zh-n a dolgozatok átlaga 40% volt.

a) Adjunk felső becslést azok arányára, akik legalább 80%-ot értek el!

b) Adjunk jobb becslést, ismerve, hogy a szórás 20%!

Megoldásvázlat Legyen X egy véletlen dolgozat eredménye.

a) Markov-egyenlőtlenséggel $\mathbb{P}(X \ge 80) \le \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$.

b) Csebisev-egyenlőtlenséggel $\mathbb{P}(X \ge 80) \le \mathbb{P}(|X - 40| \ge 40) \le \frac{20^2}{40^2} = \frac{1}{4}$.

9. feladat Egy pénzérmével a fejdobás valószínűsége 0.2. Adjunk minél jobb felső becslést annak valószínűségére, hogy 20 dobásból legalább 16 fej lesz! Mi lenne a pontos érték?

Megoldásvázlat Legyen X a fejek száma. Ekkor $X \sim \mathrm{BIN}(20, 0.2)$, így $\mathbb{E}(X) = 4$, $\mathrm{Var}(X) = 3.2$.
Markov-egyenlőtlenséggel: $\mathbb{P}(X \ge 16) \le \frac{1}{4}$.
Csebisev-egyenlőtlenséggel: $\mathbb{P}(X \ge 16) \le \mathbb{P}(|X - 4| \ge 12) \le \frac{3.2}{144} \approx 0.022$.
Markov-egyenlőtlenség trükkösen: $\mathbb{P}(X \ge 16) \le \mathbb{P}(2^X \ge 2^{16}) \le \frac{1.2^{20}}{2^{16}} \approx 0.0006$.
Pontosan (binomiális súlyfüggvényt használva): $\mathbb{P}(X \ge 16) = 1.38 \cdot 10^{-8}$.

10. feladat Egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvényére $F(0) = 0$, $F(10) = 0.8$.

a) Adjunk alsó becslést $\mathbb{E}(X)$-re!

b) Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X) = 5$. Adjunk becslést $\mathrm{Var}(X)$-re!

Megoldásvázlat

a) X nemnegatív $F(0) = 0$ miatt. Így Markov-egyenlőtlenséggel $\mathbb{E}(X) \ge 10\mathbb{P}(X \ge 10) = 2$.

b) Csebisevvel: $\mathrm{Var}(X) \ge 25\mathbb{P}(|X - 5| \ge 5) = 5$.

11. feladat Egy szabályos érmét feldobunk 100-szor. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a fejdobások száma 40 és 60 közé esik! Megjegyzés: a valódi valószínűség 95% körül van.

Megoldásvázlat Legyen X a fejek száma. Csebisevvel: $\mathbb{P}(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{1}{4}$, így a keresett valószínűség legalább $\frac{3}{4}$.

12. feladat Feldobok 100 dobókockát. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a számok összege 335 és 365 közé esik

Megoldásvázlat Legyen X a dobott számok összege. Ekkor $\mathbb{E}(X) = 350$, $\mathrm{Var}(X) = 100 \cdot \frac{35}{12} = \frac{875}{3}$. Ekkor használhatjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget:

$$\mathbb{P}(|X - 350| \geq 15) \leq \frac{35}{27},$$

amiből a kérdezett valószínűségre csak egy triviális határ adódik.