Matematika A3 építőmérnököknek 11. gyakorlat
Folytonos valószínűségi változók, Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség

1. feladat A buszmegállóba érkezésemkor megtudom, hogy az előző busz már legalább 3 perce elment. Mi a valószínűsége, hogy 5 percen belül megérkezik a buszom, ha a buszok követési ideje exponenciális eloszlású, 10 perc várható értékkel?

2. feladat Annak valószínűsége, hogy egy telefonbeszélgetés legalább 5 percig tart, 0.3. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc után is tart még?

3. feladat Egy adott területen a földrengések erejei egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, 2.4 várható értékkel a Richter skálán. Mi a valószínűsége, hogy a következő

a) földrengés ereje meghaladja a 4-et?

b) két földrengés egyike sem lesz 4-nél erősebb?

4. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0,1)$, egyébként az értéke 0.

a) Mennyi a c konstans értéke?

b) Mi az X várható értéke?

5. feladat A bankunkban várakozunk, ahol az átlagos kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, 5 perc várható értékkel. Ha csak egyvalaki van előttünk és őt éppen kiszolgálják, akkor mi a valószínűsége, hogy 4 percen belül sorra kerülünk,

a) ha éppen most érkeztünk?

b) ha már 4 perce várakozunk?

6. feladat Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{, ha } x \in (0,1), \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

7. feladat Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban ketté törünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbiknek az eloszlásfüggvénye?

Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség (ez már nem része a zárthelyi anyagának)

Markov-egyenlőtlenség Ha X egy nemnegatív valószínűségi változó, $a > 0$ konstans, akkor

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség Ha X várható értéke m, szórásnégyzete s^2, akkor minden $k > 0$ konstansra

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq k) \leq \frac{s^2}{k^2}.$$

8. feladat Egy zh-n a dolgozatok átlaga 40% volt.

a) Adjunk felső becslést azok arányára, akik legalább 80%-ot értek el!

b) Adjunk jobb becslést, ismerve, hogy a szórás 20%!

9. feladat Egy pénzérmével a fejdobás valószínűsége 0.2. Adjunk minél jobb felső becslést annak valószínűségére, hogy 20 dobásból legalább 16 fej lesz! Mi lenne a pontos érték?

10. feladat Egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvényére $F(0) = 0$, $F(10) = 0.8$.

a) Adjunk alsó becslést $\mathbb{E}(X)$-re!

b) Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X) = 5$. Adjunk becslést $\mathrm{Var}(X)$-re!

11. feladat Egy szabályos érmét feldobunk 100-szor. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a fejdobások száma 40 és 60 közé esik! Megjegyzés: a valódi valószínűség 95% körül van.

12. feladat Feldobok 100 dobókockát. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a számok összege 335 és 365 közé esik