Matematika A3 építőmérnököknek 12. gyakorlat
Nagy Számok Gyenge Törvénye, normális eloszlás, centrális határeloszlás-tétel

Nagy Számok Gyenge Törvénye Legyenek $X_1, X_2, X_3, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értéke $\mathbb{E}(X_i) = m$, szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(X_i) = s^2$. Jelölje S_n az első n valószínűségi változó összegét, azaz $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ekkor tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. feladat Legyen $g : [0,1] \to [0,1]$ egy integrálható függvény és válaszuk véletlenül (egyenletesen) $P_1, P_2, \dots$ pontokat a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten. Legyen X_i az a valószínűségi változó, ami 1, ha P_i pont a $g(x)$ függvény görbéje alatt van és 0, ha felette. Hova tart $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$?

2. feladat Legyen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ egy korlátos, integrálható függvény és $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók UNI$[0,1]$ eloszlással. Legyen $Y_i = g(X_i)$ minden $i = 1, 2, \dots$ esetén. Hova konvergál Y_i valószínűségi változók átlaga?

Normális eloszlás X valószínűségi változó normális eloszlású m, s^2 paraméterekkel (jel: $X \sim N(m, s^2)$), ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}.$$

Ekkor várható értéke $\mathbb{E}(X) = m$, szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(X) = s^2$.

Sztenderd normális eloszlásról akkor beszélünk, ha $m = 0$, $s = 1$. Ekkor a sűrűségfüggvény: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, eloszlásfüggvénye pedig

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Erre nincs elemi képlet, viszont értékei táblázatból kiolvashatók pozitív x-ekre. Negatív x esetén a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ azonosságot használhatjuk.

Ha $X \sim N(m, s^2)$, akkor az ő sztenderdizáltja $Z := \frac{X-m}{s} \sim N(0,1)$.

3. feladat Egy újszülött testsúlya normális eloszlású, 3500 g várható értékkel és 500 g szórással. Mi a valószínűsége, hogy a következő újszülött súlya meghaladja a 3200 g-ot? Mi a válasz az előző kérdésre, ha tudjuk, hogy az újszülött nem igen kis súlyú (egy újszülött igen kis súlyú, ha a súlya kisebb, mint 1500 g)?

4. feladat Egy új adózási törvényt úgy szerkesztenek meg, hogy az kedvezzen a "középosztálybeli" családoknak, vagyis azoknak, amelyeknek a jövedelme \$20000 and \$30000 között van. Ha a családok jövedelme normális eloszlást követ \$25000 várható értékkel és $\$10000^2$ varianciával, akkor a családok hány százalékának kedvez a törvény?

5. feladat Az A3-at tanuló diákok végső százalékpontos eredményei normális eloszlásúnak tekinthetők 65 várható értékkel és 15 szórással.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerű diák közepest (3-ast) kap (azaz, a pontja 60 és 70 pont közé esik)?

(b) Az átment diákok (azok, akik legalább 50 pontot értek el) hány százaléka kap közepest?

6. feladat Dohányosok nikotinszintje normális eloszlású valószínűségi változóval modellezhető, melynek várható értéke 315, szórásnégyzete 17 161.

- Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje meghaladja a 450-et?
- Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje 150 és 400 közé esik?
- Mi az a nikotinszint, amely fölöttivel a dohányosok 5%-a bír?
- Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje 400-nál magasabb, feltéve, hogy az az átlagnál magasabb?

Centrális határeloszlás-tétel Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}(X_i) = m$, $\mathbb{D}(X_i) = s$ minden $i = 1, 2, \ldots$ esetén. Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ekkor minden $a \in \mathbb{R}$ konstansra

$$\lim_n \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \cdot m}{s \cdot \sqrt{n}} \leq a\right) = \Phi(a).$$

Ennek speciális esete, amikor $X_i \sim \mathrm{BER}(p)$. Ekkor $S_n \sim \mathrm{BIN}(n, p)$ és

$$\lim_n \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}} \leq a\right) = \Phi(a).$$

Ezt nevezik **de Moivre–Laplace-tétel**nek.

Folytonossági korrekció: Fenti tételekben, ha S_n egy egészértékű változó, akkor pontosabb eredményt kapunk, ha

$$\mathbb{P}(S_n = i) \quad \text{helyett} \quad \mathbb{P}\left(i - \frac{1}{2} < S_n < i + \frac{1}{2}\right)\text{-et}$$

használunk. Ezt nevezzük folytonossági korrekciónak.

7. feladat Számos, gyermekek számára készített társasjátékban annyit kell előrelépnünk a bábuval, mint ahányast a kockával dobtunk. Legyen n dobás után a pozíciónk S_n. Mi a közelítő valószínűsége, hogy 30 dobás után a pozíciónk 90 és 120 közé esik (a határokat is beleértve)? Egy kockadobás szórása $\sqrt{35/12}$.

8. feladat Egy félvezető chipeket gyártó cég termékeinek 6.3%-a selejt. Ha a napi termelés mennyisége 2000 darab, mennyi a közelítő valószínűsége annak, hogy köztük 135-nél kevesebb selejt lesz?

9. feladat Egy kollégiumban az üres férőhelyek száma 150. Egy ide jelentkező hallgató 0.6 valószínűséggel felel meg a felvételi követelményeknek. Ha 240-en jelenkeznek, akkor mi a közelítő valószínűsége, hogy a felvettek közül senkit sem kell átirányítani másik kollégiumba?

10. feladat Egy 10000-es kisvárosban polgármestert választanak; két jelölt van, A és B. A szavazók nagyon bizonytalanok; egy adott szavazó A-ra 51% valószínűséggel szavaz majd (és így B-re 49%-os valószínűséggel). Mi a közelítő valószínűsége, hogy A nyeri a választást?

11. feladat Egy raktárban 101 láda van, melyek súlyai egymástól független és – kg-ban véve – a $(20, 40)$ számközben egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Egy 3t teherbírású teherautó érkezik, melyre elkezdik felpakolni a ládákat. Becsülje meg annak valószínűségét, hogy mind a 101 láda felrakható a teherautóra!

12. feladat Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk!