Matematika A3 építőmérnököknek 13. gyakorlat
Lineáris differenciálegyenletrendszerek

Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1x' + b_1x + c_1y' + d_1y = f(t) \tag{1}$$
$$a_2x' + b_2x + c_2y' + d_2y = g(t), \tag{2}$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i adott konstansok, $f(t)$, $g(t)$ adott függvények.

Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli. Azaz $Dx = x', Dy = y'$. Ennek segítségével kiszámolhatjuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1D + b_1 & c_1D + d_1 \\ a_2D + b_2 & c_2D + d_2 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} f(t) & c_1D + d_1 \\ g(t) & c_2D + d_2 \end{vmatrix}$$

$$\beta = \begin{vmatrix} a_1D + b_1 & f(t) \\ a_2D + b_2 & g(t) \end{vmatrix}$$

Ezután megoldjuk a $\Delta x = \alpha$, $\Delta y = \beta$ differenciálegyenleteket. Az így kapott $x(t)$, $y(t)$ megoldásokban szerepelnek különböző választható konstansok. Ezek közül például az $y(t)$ egyenletében szereplő konstansok kifejezhetők az $x(t)$-ben szereplő konstansokkal, ha visszahelyettesítjük a megoldásokat (1), (2) egyenletek valamelyikébe. Így kapjuk meg a rendszer általános megoldását.

1. feladat Oldja meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$2x' = y' + y,\ y' = 2x' + 2x,\ x(0) = 1,\ y(0) = -2$$

Megoldásvázlat $\Delta = 4D + 2$, $\alpha = \beta = 0$.
Így a megoldandó egyenletek $4x' + 2x = 0$, $4y' + 2y = 0$.
Ebből $x(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$, $y(t) = c_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$.
$2x' = y' + y$ egyenletbe helyettesítésből $c_2 = -c_1$.
Kezdeti értékekből $c_1 = 1$. Így $x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$, $y(t) = -2e^{-\frac{1}{2}t}$.

2. feladat Oldja meg az $x' = y + e^{2t},\ y' = x$ differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldásvázlat $\Delta = -D^2 + 1$, $\alpha = -2e^{2t}$, $\beta = -e^{2t}$.
Így a megoldandó egyenletek $-x'' + x = -2e^{2t}$, $-y'' + y = -e^{2t}$.
Ebből $x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$, $y(t) = c_3e^t + c_4e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$.
$y' = x$ egyenletbe helyettesítésből $c_3 = c_1$, $c_4 = -c_2$.
Tehát $x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$, $y(t) = c_1e^t - c_2e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$.

3. feladat Oldja meg az $x' + x + y' + 2y = e^t,\ x' + 2x + y' + 4y = 0$ differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldásvázlat $\Delta = D$, $\alpha = 5e^t$, $\beta = -3e^t$.
Így a megoldandó egyenletek $x' = 5e^t$, $y' = -3e^t$.
Ebből $x(t) = 5e^t + c_1$, $y(t) = -3e^t + c_2$.
$x' + 2x + y' + 4y = 0$ egyenletbe helyettesítésből $c_2 = -\frac{1}{2}c_1$.
Tehát $x(t) = 5e^t + c_1$, $y(t) = -3e^t - \frac{1}{2}c_1$.

4. feladat Oldja meg az alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$x' = 3x - 2y,\ y' = 2x - 2y,\ x(0) = 1,\ y(0) = -1.$$

Megoldásvázlat $x(t) = -e^{-t} + 2e^{2t}$, $y(t) = -2e^{-t} + e^{2t}$.

5. feladat Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert: $x' + x = -y,\ 2x' = -y' - y$.

Megoldásvázlat

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + c_2 e^{(-2-\sqrt{3})t},\\
y(t) &= (-1+\sqrt{3})c_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} - (1+\sqrt{3})c_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}.
\end{aligned}
$$