

## Matematika A3 építőmérnököknek 13. gyakorlat

### Lineáris differenciálegyenletrendszerek

Keresünk  $x(t)$ ,  $y(t)$  függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1x' + b_1x + c_1y' + d_1y = f(t) \quad (1)$$

$$a_2x' + b_2x + c_2y' + d_2y = g(t), \quad (2)$$

ahol  $a_i, b_i, c_i, d_i$  adott konstansok,  $f(t), g(t)$  adott függvények.

Bevezetjük a  $D$  deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli. Azaz  $Dx = x', Dy = y'$ . Ennek segítségével kiszámolhatjuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1D + b_1 & c_1D + d_1 \\ a_2D + b_2 & c_2D + d_2 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} f(t) & c_1D + d_1 \\ g(t) & c_2D + d_2 \end{vmatrix}$$

$$\beta = \begin{vmatrix} a_1D + b_1 & f(t) \\ a_2D + b_2 & g(t) \end{vmatrix}$$

Ezután megoldjuk a  $\Delta x = \alpha$ ,  $\Delta y = \beta$  differenciálegyenleteket. Az így kapott  $x(t)$ ,  $y(t)$  megoldásokban szerepelnek különböző választható konstansok. Ezek közül például az  $y(t)$  egyenletében szereplő konstansok kifejezhetők az  $x(t)$ -ben szereplő konstansokkal, ha visszahelyettesítjük a megoldásokat (1), (2) egyenletek valamelyikébe. Így kapjuk meg a rendszer általános megoldását.

**1. feladat** Oldja meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$2x' = y' + y, \quad y' = 2x' + 2x, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2$$

**2. feladat** Oldja meg az  $x' = y + e^{2t}$ ,  $y' = x$  differenciálegyenlet-rendszert!

**3. feladat** Oldja meg az  $x' + x + y' + 2y = e^t$ ,  $x' + 2x + y' + 4y = 0$  differenciálegyenlet-rendszert!

**4. feladat** Oldja meg az alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$x' = 3x - 2y, \quad y' = 2x - 2y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

**5. feladat** Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:  $x' + x = -y$ ,  $2x' = -y' - y$ .