

## Matematika A4 - Valószínűségszámítás 2. gyakorlat

### Feltételes valószínűség, szorzási szabály, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel, függetlenség

#### Feltételes valószínűség

Ha  $B$  olyan esemény, melyre  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ , akkor  $A$  esemény  $B$  eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége azt fejezi ki, hogy azon eseteknek, amikor  $B$  bekövetkezik hányad részében következik be  $A$  esemény is:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

#### Szorzási szabály:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n|E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}).$$

**Teljes valószínűségi tétel:** Legyen  $B_1, B_2, \dots$  teljes eseményrendszer (azaz bármely kettő metszete üres és lefedik a teljes eseményteret). Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) + \dots$$

**Bayes-tétel:** Legyen  $B_1, B_2, \dots$  teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A|B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A|B_i)}.$$

Itt  $\mathbb{P}(B_k|A)$  a **poszterior** valószínűség,  $\mathbb{P}(A|B_k)$  a **likelihood**,  $\mathbb{P}(B_k)$  pedig a **prior** valószínűség.

**1. feladat** Feldobtunk három kockát. Feltéve, hogy a dobott számok összege 15, mi a valószínűsége, hogy van köztük hatos?

**Megoldásvázlat** Legyen  $A = \{\text{dobtunk 6-ost}\}$ ,  $B = \{\text{az összeg 15}\}$ . Ekkor  $\mathbb{P}(B) = \frac{10}{216}$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{216}$ , így  $\mathbb{P}(A|B) = \frac{9}{10}$ .

**2. feladat** Egy bizonyos országban születettek 89%-a éri meg a 60 éves kort és 57%-a éri meg a 80 évet. Mi a valószínűsége, hogy egy 60 éves ember megéri a 80 évet?

**Megoldásvázlat** Legyen  $A$ , illetve  $B$  az az esemény, hogy valaki megéri a 60, illetve a 80 évet. Ekkor  $\mathbb{P}(A) = 0,89$ ,  $\mathbb{P}(B) = 0,57$ . Tudjuk, hogy  $B \subset A$  (azaz  $A \cap B = B$ , így  $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \approx 0,64$ ).

**3. feladat** Az ikrek lehetnek egy- illetve kétpetéjűek. Általában az ikrek egyharmada egypetéjű, ők természetesen egyneműek; a kétpetéjű ikreknél tegyük fel, hogy minden lehetőség egyenlő valószínűséggel áll fenn. Mindezek alapján mi a valószínűsége, hogy egy születendő ikerpár mindkét tagja fiú?

**Megoldásvázlat** Definiáljuk az alábbi eseményeket:

$$A = \{\text{egy ikerpár egypetéjű}\}$$

$$B = \{\text{egy ikerpár kétpetéjű}\}$$

$$C = \{\text{egy ikerpár mindkét tagja fiú}\}.$$

Ekkor  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ ,  $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$ ,  $\mathbb{P}(C|A) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(C|B) = \frac{1}{3}$ . Teljes valószínűség tétele szerint  $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{7}{18}$ .

**4. feladat** A zsebemben három pénzérme van. Egy köztük olyan, mellyel 0,5 valószínűséggel, a két másikkal 0,6 – 0,6 valószínűséggel dobok fejet. Találomra kiviszem az egyik pénzérmét és háromszor feldobom.

- Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás fej lesz?
- Feltéve, hogy mindhárom dobás fej lett, mi a valószínűsége, hogy a szabályos érmével dobtam?

**Megoldásvázlat** Legyen  $A = \{\text{szabályos érmét vettem ki}\}$ ,  $B = \{\text{cinkelt érmét vettem ki}\}$ ,  $C = \{\text{mindhárom dobás fej}\}$ . Ekkor  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ ,  $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$ ,  $\mathbb{P}(C|A) = 0,5^3 = \frac{1}{8}$ ,  $\mathbb{P}(C|B) = 0,6^3 = \frac{27}{125}$ .

- Teljes valószínűség tétele szerint  $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|B) \cdot \mathbb{P}(B) \approx 0,19$ .
- Bayes-tétellel  $\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C|A)}{\mathbb{P}(C)} \approx 0,22$ .

## Függetlenség

$A$  és  $B$  esemény, melyre  $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ , független, ha

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C).$$

$\mathbb{P}(B) = 0$  vagy  $\mathbb{P}(B) = 1$  esetén  $A$  és  $B$  mindig független.

**Tétel:**  $A$  és  $B$  pontosan akkor független, ha  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ .

**Tétel:**  $A_1, A_2, A_3, \dots$  események sorozata pontosan akkor teljesen független, ha minden  $k$ -ra és  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ -ra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

**5. feladat** Legyenek az  $A, B$  és  $C$  események teljesen függetlenek és legyen  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/3$ ,  $\mathbb{P}(C) = 1/4$ . Határozza meg az  $AB + AC$  esemény valószínűségét!

**Megoldásvázlat** Szita formulát használva  $A \cap B$  és  $A \cap C$  eseményekre, majd kihasználva a teljes függetlenséget (azaz metszetek valószínűsége a valószínűségek szorzata):

$$\mathbb{P}(AB + AC) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(AB \cap AC) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(ABC) = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

**6. feladat** Egy érmét háromszor feldobunk. Jelentse  $A$  azt az eseményt, hogy legfeljebb egy fejet dobtunk és  $B$  azt, hogy fejet és írást is dobtunk. Függetlenek-e az  $A$  és  $B$  események?

**Megoldásvázlat** A lehetséges esetek összeszámolásával  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}$ . Vagyis  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$  teljesül, így függetlenek.

**7. feladat** Vizsgáljuk meg az alábbi példákban, hogy a megadott  $A, B$  és  $C$  események függetlenek-e páronként, illetve teljesen.

- Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen  $A$  az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej,  $B$  az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és  $C$  az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik.
- Feldobunk egy szabályos dobókockát, legyen  $A$  az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem nagyobb,  $B$  az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem kisebb, és  $C = B$ .

## Megoldásvázlat

- Mindhárom esemény valószínűsége  $\frac{1}{2}$  és bármelyik kettő metszetének valószínűsége  $\frac{1}{4}$ . Tehát páronként függetlenek. Viszont a hármas metszet valószínűsége is  $\frac{1}{4}$ , vagyis teljesen nem függetlenek.
- $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$ ,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ . Noha  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$ , de mégsem teljesen függetlenek, hiszen páronként sem azok (pl.  $B$  és  $C$  esetén ez nyilvánvaló).

**8. feladat** Egy spam-szűrő program úgy működik, hogy a spamekben gyakran előforduló szavakat figyel. Tegyük fel, hogy az emailek 80%-a spam. A spamek 10%-ában az "ingyen" szó előfordul, míg ugyanez a szó a rendes email-eknek csupán 1%-ában olvasható. Egy most érkezett email-ben az "ingyen" szó olvasható. Mi a valószínűsége, hogy az spam?

**Megoldásvázlat** Legyen  $A = \{\text{az email spam}\}$ ,  $B = \{\text{szerepel az "ingyen" szó}\}$ . Ekkor  $\mathbb{P}(A) = 0,8$ ,  $\mathbb{P}(B|A) = 0,1$ ,  $\mathbb{P}(B|A^C) = 0,01$ . Így Bayes-tétellel

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^C) \cdot \mathbb{P}(B|A^C)} = \frac{0,08}{0,08 + 0,002} \approx 0,98.$$

**9. feladat** Egy dobozból, melyben 1 piros és 4 fehér golyó található, kivesszük egyet és anélkül, hogy megnézném, eldobom. Mi a valószínűsége, hogy ezután pirosat húzok?

**Megoldásvázlat** Második csak akkor lehet piros, ha az első fehér, ennek a valószínűsége  $4/5$ . Ha az első fehér, akkor a második  $1/4$  valószínűséggel fehér. Így szorzási szabály szerint annak a valószínűsége, hogy a második piros az  $1/5$ .

**10. feladat** Két kockát feldobok. Mi a valószínűsége, hogy különbözőket dobtam, feltéve, hogy dobtam hatost?

**Megoldásvázlat** 11 olyan elemi esemény van, amikor dobtunk hatost, ebből 10 esetben a dobások különbözők. Így a keresett valószínűség  $\frac{10}{11}$ .

**11. feladat** Egy érmét háromszor feldobunk. Feltéve, hogy van fej a dobások között, mi a valószínűsége, hogy írás is van?

**Megoldásvázlat** 7 olyan elemi esemény van, amikor dobtunk fejet, ebből 6 esetben dobtunk írást is. Így a keresett valószínűség  $\frac{6}{7}$ .

**12. feladat** Van a zsebünkben egy szabályos és egy olyan pénzérme, amelynek mindkét oldala fej. Kivesszük az egyiket és feldobjuk kétszer, az eredmény mindkét esetben fej. Mi a valószínűsége, hogy a hamissal dobtunk?

**Megoldásvázlat** Legyen  $A$  az az esemény, hogy a szabálytalan érmevel dobálunk és  $B$  az az esemény, hogy mindkét dobás fej. Ekkor Bayes-tételt használva

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{1/2}{1/2 + 1/8} = \frac{4}{5}.$$