Matematika A4 - Valószínűségszámítás 3. gyakorlat
Valószínűségi változók, eloszlásfüggvény, nevezetes diszkrét valószínűségi változók, súlyfüggvény

Valószínűségi változók

A **valószínűségi változók** az eseménytéren értelmezett függvények. Egy valószínűségi változó **diszkrét**, ha csak véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel.

Az X valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye**:

$$F(a) = \mathbb{P}(X < a).$$

Ezzel részletesebben következő gyakorlaton foglalkozunk.

Ha X diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, melyek valószínűsége rendre $p(x_i)$, azaz $p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$, akkor $p(.)$ függvény X **súlyfüggvénye**.

X és Y valószínűségi változók **függetlenek**, ha $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ események függetlenek minden $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazra.

Nevezetes eloszlások

Egyenletes: X valószínűségi változó (diszkrét) egyenletes eloszlású N paraméterrel, ha N különböző kimenetel lehetséges és ezek egyforma $\left(\frac{1}{N}\right)$ valószínűségűek. Súlyfüggvénye:

$$p(k) = \frac{1}{N} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, N.$$

Bernoulli: X valószínűségi változó Bernoulli eloszlású p paraméterrel, ha p valószínűséggel 1, $1-p$ valószínűséggel 0. Ez tehát egy p valószínűséggel sikeres kísérlet eredményét jellemzi. Jel: $X \sim$ BER(p). Súlyfüggvénye:

$$p(0) = 1 - p, \quad p(1) = p.$$

Binomiális: Ha egy kísérletet n-szer végzünk el egymástól függetlenül, ahol a siker valószínűsége p és X jelöli a sikeres kísérletek számát, akkor X eloszlása binomiális n, p paraméterekkel. Jel: $X \sim \mathrm{BIN}(n,p)$ vagy $X \sim \mathrm{B}(n,p)$. Súlyfüggvénye:

$$p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

A súlyfüggvény $k = [(n+1)p]$-ben maximális.

Ha $X \sim \mathrm{BIN}(n,p)$, akkor n darab, független $\mathrm{BER}(p)$ eloszlású valószínűségi változó összege.

Poisson: Sok, kis valószínűségű, független kísérletből a sikeresek számát Poisson eloszlású valószínűségi változóval jellemezhetjük. X valószínűségi változó eloszlása λ-paraméterű Poisson eloszlás (jel: $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$), ha súlyfüggvénye:

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

A súlyfüggvény $k = [\lambda]$-ban maximális.

Ha n elég nagy, akkor $\mathrm{BIN}(n,p)$ jól közelíthető $\mathrm{POI}(np)$ eloszlással.

Geomteriai: Egy kísérletet végezzünk el végtelen sokszor úgy, hogy a kísérletek egymástól függetlenek. Ha X a kísérletek száma az első sikerig (a sikerest is beleszámítva), akkor X geometriai eloszlású p paraméterrel, ahol p egy kísérlet sikerességének valószínűsége. Jel: $X \sim \mathrm{GEO}(p)$. Súlyfüggvénye:

$$p(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Negatív binomiális: Ha X azt adja meg, hogy mikor következik be a k. sikeres kísérlet, akkor X negatív binomiális eloszlású p és k paraméterekkel. Súlyfüggvénye:

$$p(n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}, \quad n = k,\, k+1,\, \ldots$$

Hipergeometriai eloszlás Van N termékünk, amiből M selejtes. Kihúzunk n-et és legyen X a kihúzott selejtes termékek száma. Ekkor X hipergeometriai eloszlású N, M, n paraméterekkel. Jel: $X \sim$ HIPERGEO(N, M, n). Súlyfüggvénye:

$$p(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

1. feladat Egy adóhatóság a cégek 5%-át vizsgálja meg évente teljesen véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy egy adott céget öt év alatt

a) legalább egyszer megvizsgálnak?

b) legalább kétszer megvizsgálnak?

2. feladat Tegyük fel, hogy egy egyetem 2400 hallgatója éjjel-nappal kétóránként ellenőrzi az emailjét és egy ellenőrzés 1 percet vesz igénybe (tehát 1/120 annak a valószínűsége, hogy egy adott hallgató éppen az emailjével van elfoglalva). Mi a közelítő valószínűsége, hogy éppen 19, 20 vagy 21 hallgató ellenőrzi az emailjét?

3. feladat Egy sportlövő 0.9 valószínűséggel lő 10-est. Egy lövéssorozat 10 lövésből áll és akkor elfogadható számára, ha legalább 9 tízes találat van benne. Mi a valószínűsége, hogy három lövéssorozat mindegyike elfogadható lesz?

4. feladat A roulette keréken 38 szám van: 1-től 36-ig, 0 és dupla 0. Ha Kovács úr mindig arra fogad, hogy az eredmény 1-től 12-ig terjed, mi a valószínűsége, hogy

a) Kovács úr elveszti mind az 5 első fogadását,

b) először a negyedik fogadáson nyer?

5. feladat Az AB-negatív vércsoport gyakorisága 1%. Ha 100 embert véletlenszerűen kiválasztunk, akkor

a) mi a közelítő valószínűsége (Poisson eloszlást használva), hogy közülük legalább egynek a vércsoportja AB-negatív?

b) mi a pontos valószínűsége, hogy közülük legalább egynek a vércsoportja AB-negatív?

6. feladat Hétközben (hétfőtől péntekig) 0.25 valószínűséggel késik a reggeli vonat.

a) Mi a valószínűsége, hogy hétközben legfeljebb két napon késik?

b) Legyen jó hét az, amelyen legfeljebb két napon késik. Mi a valószínűsége, hogy 4 hétből legalább 3 hét jó hét lesz?

7. feladat Az A érme feldobásakor 0.4 valószínűséggel kapunk fejet, a B érme feldobásakor ugyanez a valószínűség 0.7. E két érme közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk, és 10-szer feldobunk.

a) Függetlenek-e e dobások kimenetelei egymástól?

b) Mi a valószínűsége, hogy pontosan 7 dobás lesz fej?

c) Feltéve, hogy az első dobás fej, mi a valószínűsége, hogy az A érmével dobunk?

d) Feltéve, hogy az első dobás fej, mi a valószínűsége, hogy összesen 7 dobás lesz fej?

8. feladat A kocogj velünk mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

9. feladat Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?