Matematika A4 - Valószínűségszámítás 4. gyakorlat
Diszkrét valószínűségi változók jellemzői, folytonos valószínűségi változók

Diszkrét valószínűségi változók jellemzői

- **Várható érték**: $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$
- **Variancia** vagy **szórásnégyzet**: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$
- **Szórás**: $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
- **Módusz**: legvalószínűbb elem

Tulajdonságok:

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(cX) = c \cdot \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i) \cdot p(x_i)$, $\mathrm{Var}(cX) = c^2 \mathrm{Var}(X)$
- Ha X és Y független: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Nevezetes eloszlások várható értéke, szórása, módusza

X **eloszlása**	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	**Módusz***
BER(p)	p	$p(1-p)$	0 vagy 1
BIN(n,p)	np	$np(1-p)$	$[(n+1)p]$
POI(λ)	λ	λ	$[\lambda]$
GEO(p)	$1/p$	$(1-p)/p^2$	1
HIPERGEO(N,M,n)	$\frac{nM}{N}$	$\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)$	$[(n+1)(M+1)/(N+2)]$
NEGBIN(k,p)	k/p	$k(1-p)/p^2$	$[(n-1)/p]$

* bizonyos esetekben a módusz nem egyértelmű, l. előadás

1. feladat Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 darab 50 000 Ft-os, és 100 darab 5 000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának felével egyezzen meg?

2. feladat A magyar kártyából kiveszünk két lapot. Adjuk meg a kihúzott piros lapok számának négyzetének várható értékét! (A magyar kártyában 32 lap van, ebből 8 piros.)

3. feladat Tegyük fel, hogy $P(X=0) = 1 - P(X=1)$ és $\mathbb{E}(X) = 3 \cdot \mathrm{Var}(X)$. Mennyi $P(X=0)$?

4. feladat Egy családban addig születik gyerek, amíg az fiú nem lesz vagy a gyerekek száma el nem éri a hármat. Mi a gyerekek várható száma és szórása egy ilyen családban?

5. feladat Feldobunk egy kockát. Ha páros az eredmény, akkor annyi eurót nyerünk, amennyit dobtunk, de ha páratlant dobunk, akkor annyit veszítünk, amennyit dobtunk. Mi a nyereményünk várható értéke és szórása?

6. feladat Egy erdei séta után a rajtunk található kullancsok száma Poisson eloszlású, 0.01 várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy 5 erdei séta során összesen egy kullancsot találunk magunkon?

7. feladat Egy urnában 5 zöld és 3 fehér golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha 2 közülük zöld és 2 fehér, akkor megállunk. Különben visszarakjuk a golyókat az urnába és újra választunk 4 golyót. Az egészet mindaddig folytatjuk, amíg 4 húzott golyóból pontosan 2 zöld lesz. Mi a valószínűsége, hogy pontosan n-szer húzunk? Várhatóan hányszor húzunk?

8. feladat Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg a következő mennyiségeket:

(a) $\mathbb{E}\left[(2+X)^2\right]$

(b) $\mathbb{D}^2(4+3X)$

Folytonos valószínűségi változók

Sűrűségfüggvény : $\mathbb{P}(X \in B) = \int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}x$ minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmazra

Tulajdonságai: $f(x) \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Eloszlásfüggvény : $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

Tulajdonságai: monoton nő, $-\infty$-ben 0-hoz, ∞-ben 1-hez tart, egy oldalról folytonos

Megjegyzés Ha egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor tetszőleges $a < b$ konstansokra annak a valószínűsége, hogy X ezek közötti értéket vesz fel: $\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Nevezetes folytonos eloszlások

Egyenletes $X \sim \mathrm{UNI}(a, b) \sim E(a, b)$, ha sűrűség- és eloszlásfüggvénye $x \in (a, b)$ esetén

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad F(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Exponenciális $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, ha sűrűség- és eloszlásfüggvénye $x > 0$ esetén

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Fontos tulajdonsága az örökifjúság: $\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

9. feladat Egy információs vonalnál a várakozási idő percben mérve exponenciális eloszlású $\frac{1}{3}$ paraméterrel. Mi a valószínűsége, hogy ha már 2 perce várakozom, akkor a következő percben sorra kerülök?

10. feladat Tudjuk, hogy a busz 10:00 és 10:30 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.

(a) Mi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?

(b) Ha 10:15-kor még mindig várjuk a buszt, mi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?

11. feladat Annak valószínűsége, hogy egy telefonbeszélgetés legalább 5 percig tart, 0.3. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc után is tart még?

12. feladat Egy adott területen a földrengések erejei egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melynek paramétere $\frac{5}{12}$ a Richter skálán. Mi a valószínűsége, hogy a következő

(a) földrengés ereje meghaladja a 4-et?

(b) két földrengés egyike sem lesz 4-nél erősebb?

13. feladat Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{, ha } x \in (0,1), \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?