Matematika A4 - Valószínűségszámítás 4. gyakorlat
Diszkrét valószínűségi változók jellemzői, folytonos valószínűségi változók

Diszkrét valószínűségi változók jellemzői

- **Várható érték**: $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$
- **Variancia** vagy **szórásnégyzet**: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$
- **Szórás**: $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
- **Módusz**: legvalószínűbb elem

Tulajdonságok:

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(cX) = c \cdot \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i) \cdot p(x_i)$, $\mathrm{Var}(cX) = c^2 \mathrm{Var}(X)$
- Ha X és Y független: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Nevezetes eloszlások várható értéke, szórása, módusza

X **eloszlása**	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	**Módusz***
$\mathrm{BER}(p)$	p	$p(1-p)$	0 vagy 1
$\mathrm{BIN}(n,p)$	np	$np(1-p)$	$[(n+1)p]$
$\mathrm{POI}(\lambda)$	λ	λ	$[\lambda]$
$\mathrm{GEO}(p)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	1
$\mathrm{HIPERGEO}(N,M,n)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)$	$[(n+1)(M+1)/(N+2)]$
$\mathrm{NEGBIN}(k,p)$	k/p	$k(1-p)/p^2$	$[(n-1)/p]$

* bizonyos esetekben a módusz nem egyértelmű, l. előadás

1. feladat Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 darab 50 000 Ft-os, és 100 darab 5 000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának felével egyezzen meg?

Megoldásvázlat A nyeremény $\frac{1}{40000}$ valószínűséggel 1 000 000 Ft, $\frac{10}{40000}$ valószínűséggel 50 000 Ft, $\frac{100}{40000}$ valószínűséggel 5 000 Ft, egyébként 0 Ft. Így a várható értéke 50 Ft, vagyis a jegy ára 100 Ft kell legyen.

2. feladat A magyar kártyából kiveszünk két lapot. Adjuk meg a kihúzott piros lapok számának négyzetének várható értékét! (A magyar kártyában 32 lap van, ebből 8 piros.)

Megoldásvázlat Legyen X a kihúzott piros lapok száma. Ekkor $\mathbb{P}(X=0) = \frac{69}{124}$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{48}{124}$, $\mathbb{P}(X=2) = \frac{7}{124}$. Így $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \frac{69}{124} + 1^2 \cdot \frac{48}{124} + 2^2 \cdot \frac{7}{124} = \frac{19}{31}$.

3. feladat Tegyük fel, hogy $P(X=0) = 1 - P(X=1)$ és $\mathbb{E}(X) = 3 \cdot \mathrm{Var}(X)$. Mennyi $P(X=0)$?

Megoldásvázlat Legyen $p = P(X=1)$. Ekkor $X \sim \mathrm{BER}(p)$, így az egyenletből $p = 3p(1-p)$, vagyis $p = \frac{2}{3}$, azaz $P(X=0) = \frac{1}{3}$.

4. feladat Egy családban addig születik gyerek, amíg az fiú nem lesz vagy a gyerekek száma el nem éri a hármat. Mi a gyerekek várható száma és szórása egy ilyen családban?

Megoldásvázlat Legyen X a gyerekek száma. Ekkor $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{4}$. Így $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{4}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{15}{4}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{11}{16}$, $\mathbb{D}(X) = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

5. feladat Feldobunk egy kockát. Ha páros az eredmény, akkor annyi eurót nyerünk, amennyit dobtunk, de ha páratlant dobunk, akkor annyit veszítünk, amennyit dobtunk. Mi a nyereményünk várható értéke és szórása?

Megoldásvázlat A nyeremény $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}$ valószínűséggel 2, 4, 6, -1, -3 vagy -5. Így várható értéke $\frac{1}{2}$, szórása $\sqrt{\frac{179}{12}}$.

6. feladat Egy erdei séta után a rajtunk található kullancsok száma Poisson eloszlású, 0.01 várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy 5 erdei séta során összesen egy kullancsot találunk magunkon?

Megoldásvázlat Használjuk, hogy független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege is Poisson eloszlású, ahol az összeg paramétere a paraméterek összege. Így, ha 1 erdei séta alatt a kullancsok számának eloszlása POI(0.01), akkor 5 erdei séta alatt POI(0.05). Így a keresett valószínűség $0.05 \cdot e^{-0.05} \approx 0.048$.

7. feladat Egy urnában 5 zöld és 3 fehér golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha 2 közülük zöld és 2 fehér, akkor megállunk. Különben visszarakjuk a golyókat az urnába és újra választunk 4 golyót. Az egészet mindaddig folytatjuk, amíg 4 húzott golyóból pontosan 2 zöld lesz. Mi a valószínűsége, hogy pontosan n-szer húzunk? Várhatóan hányszor húzunk?

Megoldásvázlat Ha X egy húzásnál a kihúzott zöld golyók száma, akkor $X \sim \text{HIPERGEO}(8, 5, 4)$, így annak a valószínűsége, hogy 2 zöldet húzunk $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{7}$. Legyen Y a körök száma. Ekkor $Y \sim \text{GEO}\left(\frac{3}{7}\right)$. Így annak a valószínűsége, hogy n-szer húzunk $\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{7}$, várható értéke $\frac{7}{3}$.

8. feladat Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg a következő mennyiségeket:

(a) $\mathbb{E}\left[(2 + X)^2\right]$

(b) $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$

Megoldásvázlat

(a) 14

(b) 45

Folytonos valószínűségi változók

Sűrűségfüggvény : $\mathbb{P}(X \in B) = \int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}x$ minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmazra

Tulajdonságai: $f(x) \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Eloszlásfüggvény : $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

Tulajdonságai: monoton nő, $-\infty$-ben 0-hoz, ∞-ben 1-hez tart, egy oldalról folytonos

Megjegyzés Ha egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor tetszőleges $a < b$ konstansokra annak a valószínűsége, hogy X ezek közötti értéket vesz fel: $\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Nevezetes folytonos eloszlások

Egyenletes $X \sim \text{UNI}(a, b) \sim E(a, b)$, ha sűrűség- és eloszlásfüggvénye $x \in (a, b)$ esetén

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad F(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Exponenciális $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, ha sűrűség- és eloszlásfüggvénye $x > 0$ esetén

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Fontos tulajdonsága az örökifjúság: $\mathbb{P}(X > s + t \,|\, X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

9. feladat Egy információs vonalnál a várakozási idő percben mérve exponenciális eloszlású $\frac{1}{3}$ paraméterrel. Mi a valószínűsége, hogy ha már 2 perce várakozom, akkor a következő percben sorra kerülök?

Megoldásvázlat Legyen T a várakozási idő. Örökifjú tulajdonság alapján a kérdezett valószínűség $\mathbb{P}(T < 1) = 1 - e^{-1/3}$.

10. feladat Tudjuk, hogy a busz 10:00 és 10:30 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.

(a) Mi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?

(b) Ha 10:15-kor még mindig várjuk a buszt, mi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?

Megoldásvázlat Legyen T a várakozási idő, ekkor $T \sim \mathrm{UNI}(0, 30)$.

a) $\mathbb{P}(T > 10) = \frac{2}{3}$

b) $\mathbb{P}(T > 25 \,|\, T > 15) = \frac{1}{3}$

11. feladat Annak valószínűsége, hogy egy telefonbeszélgetés legalább 5 percig tart, 0.3. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc után is tart még?

Megoldásvázlat Feltehető, hogy egy telefonbeszélgetés hossza exponenciális eloszlású, ez legyen T. Ekkor $\mathbb{P}(T \geq 5) = 0.3$, amiből az eloszlás paramétere $\lambda = -\frac{\ln 0.3}{5}$, amiből $\mathbb{P}(T \geq 10) = e^{-10\lambda} = 0.09$.

12. feladat Egy adott területen a földrengések erejei egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melynek paramétere $\frac{5}{12}$ a Richter skálán. Mi a valószínűsége, hogy a következő

(a) földrengés ereje meghaladja a 4-et?

(b) két földrengés egyike sem lesz 4-nél erősebb?

Megoldásvázlat Legyen X, Y a következő két földrengés ereje.

(a) $\mathbb{P}(X > 4) = e^{-5/3}$

(b) $\mathbb{P}(X < 4, Y < 4) = \left(1 - e^{-5/3}\right)^2$

13. feladat Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{, ha } x \in (0,1), \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

Megoldásvázlat Legyen X a kereslet és T a keresett tartályméret. Ekkor $\mathbb{P}(T < X) = 0.01$. Integrálással adódik, hogy $(1 - T)^5 = 0.01$, amiből $T = 1 - \sqrt[5]{0.01} \approx 0.6$.