Matematika A4 - Valószínűségszámítás 1. gyakorlat
Kombinatorika, a klasszikus valószínűségi modell

Kombinatorika

Permutáció

- Ismétlés nélküli permutáció: n különböző elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni: $P_n = n!$.
- Ismétléses permutáció: n elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni, ha ezek közül $k_1, k_2, \ldots, k_s$ egyforma: $P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_s)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_s!}$.

Kombináció

- Ismétlés nélküli kombináció: n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani: $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$.
- Ismétléses kombináció: n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha egy elemet többször is választhatunk: $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$.

Variáció

- Ismétlés nélküli variáció: n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha a sorrend is számít: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Ismétléses variáció: n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha a sorrend is számít és egy elemet többször is választhatunk: $V_n^{k,i} = n^k$.

1. feladat Egy villamosmérnök hallgatónak 6 tárgyból kell vizsgáznia a félév végén. Hányféle sorrendben tudhatja le a 6 tárgyat? És hány különböző sorrendben lehetnek a vizsgái, ha tudjuk, hogy Matek A4-ből háromszor is elment vizsgázni, míg a másik 5 tárgyból csak egyszer-egyszer?

Megoldásvázlat Az első esetben ismétlés nélküli permutációt használva 6!. A második esetben ismétléses permutációval $\frac{8!}{3!} = 6720$.

2. feladat Az TANÁRSZTRÁJK szó betűinek összekeverésével hány különböző (nem feltétlenül értelmes) 12 betűs szó készíthető? És a GÁZÁRVÁLTOZÁS betűiből hány 13 betűs?

Megoldásvázlat Ismétléses permutációval: $\frac{12!}{2^3}$, illetve $\frac{13!}{4! \cdot 2}$.

3. feladat A félév során a hátralévő 12 gyakorlaton 3 darab kis zh lesz, melyek időpontjait nem határozták meg előre.

(a) Hányféleképpen tudja a gyakorlatvezető kiválasztani, hogy melyik 3 órán legyenek a zh-k?

(b) Hogyan változik ez a szám, ha egy órán akár több zh is megírható?

(c) A gyakorlatvezető eldöntötte, hogy lesz egy könnyű, egy közepes nehézségű és egy szinte lehetetlen zh. Mennyi a lehetőségek száma a fenti két esetben, ha azt is tudni akarjuk, hogy melyik héten milyen nehézségű zh lesz?

Megoldásvázlat

(a) Ismétlés nélküli kombinációval: $\binom{12}{3} = 220$.

(b) Ismétléses kombináció: $\binom{12+3-1}{3} = \binom{14}{3} = 364$.

(c) Első esetben ismétlés nélküli variációval $\frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 1320$. Második esetben ismétléses variációval $12^3 = 1728$.

4. feladat A Matek A4 zárthelyire a hallgatók olyan jól felkészültek, hogy senkit se sikerült megbuktatni. 2 darab kettes, 4 darab hármas, 5 darab négyes és 8 darab ötös dolgozat született. Hányféleképpen lehet kiválasztani 5 hallgatót úgy, hogy a jegyeik között szerepeljen mind a négy osztályzat?

Megoldásvázlat 5 hely van, mind a 4 jegy képviselve kell legyen, így valamelyikhez 2 hallgató tartozik. Ezek egymástól független lehetőségek, így külön-külön összeadódnak:

$$\binom{2}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 + \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 + \binom{5}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 + \binom{8}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5.$$

5. feladat Egy másik tanszéken véletlenszerűen osztályoznak, csak azt határozzák meg előre, hogy a különböző osztályzatokból hány darabnak kell születnie. Hányféleképpen alakulhatnak a hallgatók jegyei egy 20 fős csoportban, ha minden érdemjegyhez 4-4 hallgatót szeretnének kiválasztani?

Megoldásvázlat $\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}$

A klasszikus valószínűségi modell

Véletlen kísérletek eredményét vizsgáljuk. Lehetséges kimeneteleket **elemi esemény**eknek nevezzük, ezek összessége az **eseménytér**. Az eseménytér tetszőleges részhalmazát **esemény**nek nevezzük.

Például kockadobásnál az elemi események (a dobás lehetséges eredményei): 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az eseménytér: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Események például: $A = \{\text{párost dobunk}\}$, $B = \{\text{a dobás 1 vagy 2}\}$.

Alapfogalmak:

- A és B esemény egymás **komplementer**e, ha biztosan az egyik következik be közülük, jel: $B = \overline{A} = A^C$.
- E az A és B **unió**ja (vagy összege), ha E pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik: $E = A + B = A \cup B$.
- F az A és B **metszet**e (vagy szorzata), ha F pontosan akkor következik be, ha A és B is bekövetkezik: $F = A \cdot B = A \cap B$.
- G az A és B **különbség**e, ha G pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem: $G = A - B = A \setminus B$.
- A és B **egymást kizáró események**, ha egyszerre soha nem következnek be.
- A **maga után vonja** B eseményt, ha A bekövetkezése esetén B is bekövetkezik: $A \subset B$.

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A-val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűség**ének, $\mathbb{P}(A)$-val jelöljük.

A valószínűség axiómái, alaptulajdonságai

- $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ minden E eseményre
- $\mathbb{P}(S) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, ahol S az eseménytér
- Ha $A = A_1 + \cdots + A_k + \ldots$ és $A_i \cdot A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$-re, akkor $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_k) + \ldots$
- $\mathbb{P}(E^C) = 1 - \mathbb{P}(E)$
- $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$, ha $E \subset F$
- $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$
- $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
- Ha egy kísérletnek véges sok kimenetele lehet és ezek mind azonos valószínűséggel következnek be, akkor egy E esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}$$

6. feladat Két dobozba 7 golyót teszünk, véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy mindkét dobozban lesz golyó?

Megoldásvázlat Összesen 2^7 elemi esemény van, ebből 2 esetben nincs mindkettőben golyó, így a keresett valószínűség: $1 - \frac{2}{2^7}$.

7. feladat Egy dobozban van 7 zöld és 4 fehér golyó. Visszatevés nélkül kiveszünk hármat. Mi a valószínűsége, hogy az első kettő zöld és a harmadik fehér lesz?

Megoldásvázlat

$$\frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}$$

8. feladat Az A illetve B urnák 4 zöld és 8 fehér illetve 2 zöld és 3 fehér golyót tartalmaznak. Ha egy-egy golyót kiveszünk a két urnából, mi a valószínűsége, hogy különböző színűek lesznek?

Megoldásvázlat Összes esemény száma $12 \cdot 5 = 60$. Jó események száma $4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 28$, azaz a valószínűség $\frac{28}{60} = \frac{7}{15}$.

9. feladat Ha két kockát feldobunk, mi a valószínűsége, hogy a két dobás eltérése legfeljebb 2?

Megoldásvázlat Összesen 36 elemi esemény van. Ebből 12 esetben lesz a különbség nagyobb, mint 2. Így a valószínűség $\frac{2}{3}$.

10. feladat Öt ember, nevezzük őket A, B, C, D, E-nek, véletlenszerűen leül egy padra. Mi a valószínűsége, hogy A balra ül B-től és B balra ül C-től?

Megoldásvázlat Összes lehetőség: $5! = 120$. A, B, C sorrendje ismert. D, E hozzájuk képest 4 helyen ülhet. Ebből kettőt (ismétléses kombinációval) $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen lehet kiválasztani. D és E sorrendje miatt mindegyik választáshoz 2 elemi esemény tartozik. Így a valószínűség: $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

11. feladat Az 1-től 1000-ig terjedő számok közül találomra kiválasztunk egyet. Mi a valószínűsége, hogy a szám 3-mal vagy 5-tel osztható?

Megoldásvázlat $\frac{333}{1000}$, illetve $\frac{200}{1000}$.

12. feladat Öt ember, nevezzük őket A, B, C, D, E - nek, véletlenszerűen leül egy padra. Mi a valószínűsége, hogy A és B egymás mellé ül?

Megoldásvázlat A-t és B-t egy emberként kezelve a jó leülések száma $4! \cdot 2$, így a valószínűség $\frac{2}{5}$.

13. feladat Két férfi és három nő ül egy padon. Mi a valószínűsége, hogy nemek szerint felváltva ülnek?

Megoldásvázlat $\frac{3! \cdot 2!}{5!} = \frac{1}{10}$.