Matematika A4 - Valószínűségszámítás 5. gyakorlat
Poisson-folyamat

Poisson-folyamat

- Véletlen időpontban érkező ismétlődő eseményeket modellez
- Két érkezés közötti idő eloszlása EXP(λ) valamilyen λ-val (várható érték $\frac{1}{\lambda}$, szórásnégyzet $\frac{1}{\lambda^2}$)
- t időpontig bekövetkező érkezések számának eloszlása POI($\lambda \cdot t$)
- Az n-edik érkezésig eltelő idő eloszlása Erlang(n, λ), aminek sűrűségfüggvénye $t > 0$ esetén:

$$f(t) = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda t}.$$

1. feladat Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik? Hány óra garanciát vállaljanak, ha garanciális időn belül csak 5% garanciaigényt akarnak kielégíteni?

Megoldásvázlat Legyen X egy berendezés működési ideje. Ekkor $\mathbb{P}(X < 1000) = 0.02$, amiből az eloszlás paramétere $\lambda = \frac{-\ln 0.98}{1000} \approx 2.02 \cdot 10^{-5}$. A várható működési idő $\frac{1}{\lambda}$. Annak a valószínűsége, hogy ennél tovább működik egy berendezés: $\mathbb{P}(X > \frac{1}{\lambda}) = e^{-1}$.

Ha T a vállalt garanciaidő, akkor az kell, hogy $\mathbb{P}(X < T) = 0.05$, ahonnan $T = -\frac{\ln 0.95}{\lambda} \approx 2538$ óra.

2. feladat Egy buszmegállóban annak valószínűsége, hogy a következő t percen belül jön busz, $1 - e^{-\frac{t}{8}}$.

(a) Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk?

(b) Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 5 percet, de kevesebb mint 10 percet kell várakoznunk?

(c) Mi a várakozási időnk várható értéke?

(d) Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

(e) Mi annak a valószínűsége, hogy 1 órán belül legalább 5 busz érkezik?

Megoldásvázlat Legyen X a busz érkezési ideje. $\mathbb{P}(X < t) = 1 - e^{-\frac{t}{8}}$, tehát $X \sim \text{EXP}\left(\frac{1}{8}\right)$.

(a) $\mathbb{P}(X > 10) = e^{-\frac{10}{8}} = 0,2865$.

(b) $\mathbb{P}(5 < X < 10) = 0,2488$.

(c) 8 perc.

(d) $\mathbb{P}(X > 14 \mid X > 4) = \mathbb{P}(X > 10) = 0,2865$.

(e) A buszok érkezése Poisson-folyamatot alkot, így 60 percen belül érkező buszok számának eloszlása POI $\left(\frac{1}{8} \cdot 60\right) = \text{POI}(7,5)$, amiből a kérdezett valószínűség:

$$1 - \sum_{k=0}^{4} e^{-7,5} \cdot \frac{7,5^k}{k!}.$$

3. feladat Tegyük fel, hogy egy villanykörte élettartama (évben) 1/2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

(a) Mennyi a várható élettartama?

(b) Mi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 2 évig ég?

(c) Mi a valószínűsége, hogy több, mint 1 évig nem ég ki?

(d) Mi a valószínűsége, hogy mostantól kezdve egy napig ég, de utána a következő nap folyamán kiég?

(e) Feltéve, hogy 1 évig nem ég ki, mi a valószínűsége, hogy utána még legalább negyed évig működni fog?

Megoldásvázlat Legyen az élettartam X.

(a) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 2$ év.

(b) $\mathbb{P}(X < 2) = F(2) = 1 - e^{-0,5\cdot 2} = 1 - e^{-1} = 0,6321$.

(c) $\mathbb{P}(X > 1) = 1 - F(1) = e^{-\frac{1}{2}} = 0,6065$.

(d) $\mathbb{P}\left(\frac{1}{365} < X < \frac{2}{365}\right) = F\left(\frac{2}{365}\right) - F\left(\frac{1}{365}\right) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{365}} - e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{365}} = 0,1367\%$.

(e) Örökifjú tulajdonság miatt: $\mathbb{P}(X > 1,25 \,|\, X > 1) = \mathbb{P}(X > 0,25) = e^{-0,5\cdot 0,25} = 88,25\%$.

4. feladat Felhívom a barátomat a mobilján 10 óra 10 perckor, de az foglaltat jelez. Tudom, hogy a barátom beszélgetéseinek hossza (percben) exponenciális eloszlást követ, és a várható értéke 3 perc.

(a) Mi a valószínűsége, hogy a következő 5 percben (10:10 - 10:15 között) végig foglalt lesz?

(b) Mi a valószínűsége, hogy a következő 5 percben (10:10 - 10:15 között) végig foglalt lesz, feltéve hogy tudom, hogy már 10:00 óta foglalt?

(c) Legkorábban hánykor hívjam fel újra, ha azt szeretném, hogy már legalább 1/2 esélyem legyen arra, hogy nem lesz foglalt (újabb hívás beérkezését nem számolva)?

Megoldásvázlat Jelölje X a barátom telefonbeszélgetésének a hosszát (percben). A várható érték 3 perc ($\mathbb{E}(X) = 3$), ami azt jelenti, hogy a paraméter $\lambda = \frac{1}{3}$.

(a) $\mathbb{P}(\text{10:15-kor még foglalt}) = \mathbb{P}(X > 5) = 1 - F(5) = e^{-\frac{5}{3}} = 18,89\%$.

(b) $\mathbb{P}(\text{10:15-kor még foglalt} \mid \text{10:00 és 10:10 között foglalt volt}) = \mathbb{P}(X > 15 \,|\, x > 10) = \mathbb{P}(X > 5) = 18,89\%$.

(c) $\mathbb{P}(X < t) = 1 - e^{-\frac{t}{3}} \geq \frac{1}{2}$, azaz $t \geq 3\ln 2 = 2,079$, tehát ha kb 2 perc 5 másodperc után hívom, akkor már 1/2-nél nagyobb eséllyel elérem.

5. feladat Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél 2/3 annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 1000 óra elteltével pontosan 150 égő világít?

Megoldásvázlat $\mathbb{P}(X > 2000) = \frac{2}{3}$, amiből λ meghatározható. Ebből $\mathbb{P}(X > 1000) = e^{-1000\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8165$.

Az 1000 óra múlva még égő villanykörték száma binomiális eloszlást követ $n = 200$ és $p = 0,8165$ paraméterekkel. Ezért annak a valószínűsége, hogy pontosan 150 db világít:

$$\binom{200}{150} \cdot 0,8165^{150} \cdot 0,1835^{50}.$$

6. feladat Egy bizonyos fajta mosógép első meghibásodása exponenciális eloszlást követ. A gépek meghibásodása 70% eséllyel történik öt éven belül. Határozza meg annak valószínűségét, hogy az általam vásárolt mosógép első meghibásodása három éven belül történik!

Megoldásvázlat $\mathbb{P}(X < 5) = 0,7$, amiből $\lambda = -\frac{1}{5} \ln 0,3$. Annak valószínűsége, hogy a mosógépem 3 éven belül elromlik: $\mathbb{P}(X < 3) = 1 - e^{-3\lambda} = 0,5144$.

7. feladat A menzai poharak kirakásuktól számított törési ideje exponenciális eloszlást követ 6 hónap várható értékkel. Határozza meg annak valószínűségét, hogy 50 kirakott pohárból legfeljebb 30 törik el egy év alatt!

Megoldásvázlat $\lambda = 2$ év, tehát $\mathbb{P}(X < 1) = 1 - e^{-2} = 0,8647$. Az 1 év alatt már összetört poharak száma binomiális eloszlást követ $n = 50$ és $p = 0,8647$ paraméterekkel. Ezért annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 30 db romlik el 1 éven belül:

$$\sum_{k=0}^{30} \binom{50}{k} \cdot 0,8647^k \cdot 0,1353^{50-k}.$$

8. feladat A buszmegállóban a buszok egymás után exponenciális eloszlású időtartamonként érkeznek, melynek várható értéke 5 perc. Beállok a megállóba, és várok valakit, aki a harmadik busszal érkezik.

(a) Várhatóan hány percig állok ott, mire megérkezik?

(b) Mi a várakozási időm eloszlása?

(c) Feltéve, hogy az első busz 4 perc múlva megérkezik, mi az ezután következő várakozási időm várható értéke és eloszlása?

Megoldásvázlat $\lambda = \frac{1}{5}$.

(a) $\mathbb{E}(X) = 15$.

(b) Erlang eloszlás 3 és 1/5 paraméterekkel.

(c) Ha az első busz megérkezett, mindegy hogy mikor, akkor még két buszt kell várnom, tehát a várható érték erre a várakozási időre 10 perc, az eloszlása pedig Erlang 2 és 1/5 paraméterekkel.

9. feladat Egy nem túl forgalmas útszakaszon egy óra alatt átlagosan 6 kocsi halad át.

(a) Mi annak az esélye, hogy egy másodperc alatt nem jön autó?

(b) Mi annak az esélye, hogy egy perc alatt nem jön autó?

(c) Mi annak az esélye, hogy egy óra alatt nem jön autó?

(d) Milyen eloszlást követ a 20 percen belül érkező autók száma?

(e) Milyen eloszlást követ az első autó érkezésének időpontja?

(f) Milyen eloszlást követ a második autó érkezésének időpontja?

(g) Mi annak a valószínűsége, hogy a második autó 20 percen belül érkezik?

Megoldásvázlat Legyen X a következő autó megérkezéséig eltelő idő. Ekkor $X \sim \mathrm{EXP}(6)$.

(a) $\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{3600}\right) = 0,9983$.

(b) $e^{-\frac{1}{10}}$.

(c) Közelítőleg e^{-6}.

(d) Közelítőleg Poisson 2 paraméterrel.

(e) Exponenciális 6 paraméterrel, jelöljük ezt a valószínűségi változót Y-nal.

(f) Erlang, 2 és 6 paraméterekkel, jelöljük ezt a valószínűségi változót Z-vel.

(g) $\mathbb{P}(Z < 20) = \mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - 3e^{-2}$.