Matematika A4 - Valószínűségszámítás 6. gyakorlat
Várható érték (folytonos), normális eloszlás, nagy számok törvénye, CHT

Folytonos valószínűségi változók várható értéke

Folytonos valószínűségi változó várható értéke: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

X **eloszlása**	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{UNI}(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
$\mathrm{EXP}(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

1. feladat Tekintsük az $f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{, ha } x \in (0,1) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$ függvényt, ahol c ismeretlen konstans.

(a) Mennyi a c értéke, ha az f egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?

(b) Számítsa ki a $P(X \geq 0.5)$ valószínűséget!

(c) Számítsa ki az $E(X)$ és $E\left(X^2\right)$ várható értékeket!

(d) Határozza meg az eloszlásfüggvényt!

2. feladat Lehetnek-e az alábbi függvények eloszlásfüggvények? Ha igen, számoljuk ki a várható értéket!

(a) $F(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{x+1} & \text{, ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$ (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{4} \cdot (4-x) & \text{, ha } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{, ha } x > 2 \end{cases}$

3. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0,1)$, egyébként az értéke 0. Mennyi a c konstans értéke? Mi az X várható értéke?

Nagy számok gyenge törvénye

Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értéke $\mathbb{E}(X_i) = m$, szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(X_i) = s^2$. Jelölje S_n az első n valószínűségi változó összegét, azaz $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ekkor tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

4. feladat Legyen $g : [0,1] \to [0,1]$ egy integrálható függvény és válaszuk véletlenül (egyenletesen) $P_1, P_2, \ldots$ pontokat a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten. Legyen X_i az a valószínűségi változó, ami 1, ha P_i pont a $g(x)$ függvény görbéje alatt van és 0, ha felette. Hova tart $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$?

Normális eloszlás

X valószínűségi változó normális eloszlású m, s^2 paraméterekkel (jel: $X \sim N(m, s^2)$), ha sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot s} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$. Ekkor várható értéke $\mathbb{E}(X) = m$, szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(X) = s^2$.

Sztenderd normális eloszlásról akkor beszélünk, ha $m = 0$, $s = 1$. Ekkor a sűrűség- és eloszlásfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Erre nincs elemi képlet, viszont értékei táblázatból kiolvashatók pozitív x-ekre. Negatív x esetén a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ azonosságot használhatjuk.

Ha $X \sim N(m, s^2)$, akkor az ő **sztenderdizált**ja $Z := \frac{X-m}{s} \sim N(0,1)$.

5. feladat Egy új adózási törvényt úgy szerkesztenek meg, hogy az kedvezzen a "középosztálybeli" családoknak, vagyis azoknak, amelyeknek a jövedelme \$20000 and \$30000 között van. Ha a családok jövedelme normális eloszlást követ \$25000 várható értékkel és $\$10000^2$, varianciával, akkor a családok hány százalékának kedvez a törvény?

6. feladat Az A4-et tanuló diákok végső százalékpontos eredményei normális eloszlásúnak tekinthetők 65 várható értékkel és 15 szórással.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerű diák közepest (3-ast) kap (azaz, a pontja 60 és 70 pont közé esik)?

(b) Az átment diákok (azok, akik legalább 50 pontot értek el) hány százaléka kap közepest?

7. feladat Dohányosok nikotinszintje normális eloszlású valószínűségi változóval modellezhető, melynek várható értéke 315, szórásnégyzete 17 161.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje meghaladja a 450-et?

(b) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje 150 és 400 közé esik?

(c) Mi az a nikotinszint, amely fölöttivel a dohányosok 5%-a bír?

(d) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje 400-nál magasabb, feltéve, hogy az az átlagnál magasabb?

Centrális határeloszlás-tétel

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}(X_i) = m$, $\mathbb{D}(X_i) = s$ minden $i = 1, 2, \ldots$ esetén. Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ekkor minden $a \in \mathbb{R}$ konstansra

$$\lim_n \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \cdot m}{s \cdot \sqrt{n}} \le a\right) = \Phi(a).$$

Ennek speciális esete, amikor $X_i \sim \mathrm{BER}(p)$. Ekkor $S_n \sim \mathrm{BIN}(n, p)$, így $m = p$, $s = \sqrt{p(1-p)}$. Ezt nevezik **de Moivre–Laplace-tétel**nek.

Ha S_n egy egészértékű változó, akkor pontosabb eredményt kapunk, ha **folytonossági korrekció**t használunk, azaz $\mathbb{P}(S_n = i)$ helyett $\mathbb{P}\left(i - \frac{1}{2} < S_n < i + \frac{1}{2}\right)$-vel számolunk.

8. feladat Számos, gyermekek számára készített társasjátékban annyit kell előrelépnünk a bábuval, mint ahányast a kockával dobtunk. Legyen n dobás után a pozíciónk S_n. Mi a közelítő valószínűsége, hogy 30 dobás után a pozíciónk 90 és 120 közé esik (a határokat is beleértve)? Egy kockadobás szórása $\sqrt{35/12}$.

9. feladat Egy félvezető chipeket gyártó cég termékeinek 6.3%-a selejt. Ha a napi termelés mennyisége 2000 darab, mennyi a közelítő valószínűsége annak, hogy köztük 135-nél kevesebb selejt lesz?

10. feladat Egy raktárban 101 láda van, melyek súlyai egymástól független és – kg-ban véve – a $(20, 40)$ számközben egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Egy 3t teherbírású teherautó érkezik, melyre elkezdik felpakolni a ládákat. Becsülje meg annak valószínűségét, hogy mind a 101 láda felrakható a teherautóra!

11. feladat Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk!

12. feladat Egy gyár kétfajta érmét gyárt: egy igazságosat, és egy hamisat ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?