Matematika A4 - Valószínűségszámítás 6. gyakorlat
Várható érték (folytonos), normális eloszlás, nagy számok törvénye, CHT

Folytonos valószínűségi változók várható értéke

Folytonos valószínűségi változó várható értéke: $\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

X **eloszlása**	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{UNI}(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
$\mathrm{EXP}(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

1. feladat Tekintsük az $f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{, ha } x \in (0,1) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$ függvényt, ahol c ismeretlen konstans.

(a) Mennyi a c értéke, ha az f egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?

(b) Számítsa ki a $P(X \geq 0.5)$ valószínűséget!

(c) Számítsa ki az $E(X)$ és $E\left(X^2\right)$ várható értékeket!

(d) Határozza meg az eloszlásfüggvényt!

Megoldásvázlat

(a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ egyenletből $c = 3$.

(b) $P(X \geq 0.5) = \int\limits_{0.5}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{8}$.

(c) Definíció alapján $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{5}$.

(d) Definíció alapján $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F(x) = 1$, ha $x > 1$. Ha $x \in (0,1]$:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x} 3t^2\,\mathrm{d}t = x^3.$$

2. feladat Lehetnek-e az alábbi függvények eloszlásfüggvények? Ha igen, számoljuk ki a várható értéket!

(a) $F(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{x+1} & \text{, ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$ (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{4}\cdot(4-x) & \text{, ha } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{, ha } x > 2 \end{cases}$

Megoldásvázlat

(a) Végtelenben 2-höz tart, így nem lehet eloszlásfüggvény.

(b) Szükséges tulajdonságok ellenőrizhetők, ez egy eloszlásfüggvény. Várható értékhez először deriválással meghatározzuk a sűrűségfüggvényt: $f(x) = F'(x) = 1 - \frac{x}{2}$, ha $x \in (0,2)$ (egyébként $f(x) = 0$). Így

$$\mathbb{E}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} x - \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

3. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0,1)$, egyébként az értéke 0. Mennyi a c konstans értéke? Mi az X várható értéke?

Megoldásvázlat $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ egyenletből $c = 6$

Definíció alapján a várható érték $\frac{1}{2}$.

Nagy számok gyenge törvénye

Legyenek $X_1, X_2, X_3, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értéke $\mathbb{E}(X_i) = m$, szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(X_i) = s^2$. Jelölje S_n az első n valószínűségi változó összegét, azaz $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ekkor tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. feladat Legyen $g : [0,1] \to [0,1]$ egy integrálható függvény és válaszuk véletlenül (egyenletesen) $P_1, P_2, \dots$ pontokat a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten. Legyen X_i az a valószínűségi változó, ami 1, ha P_i pont a $g(x)$ függvény görbéje alatt van és 0, ha felette. Hova tart $\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$?

Megoldásvázlat A nagy számok gyenge törvénye alapján az érték $\mathbb{E}(X_i)$-hez tart. $X_i \sim \mathrm{BER}(p)$, ahol p annak a valószínűsége, hogy egy pont a görbe alá esik, ami épp $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. Így a határérték $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Normális eloszlás

X valószínűségi változó normális eloszlású m, s^2 paraméterekkel (jel: $X \sim N(m, s^2)$), ha sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot s} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$. Ekkor várható értéke $\mathbb{E}(X) = m$, szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(X) = s^2$.

Sztenderd normális eloszlásról akkor beszélünk, ha $m = 0$, $s = 1$. Ekkor a sűrűség- és eloszlásfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Erre nincs elemi képlet, viszont értékei táblázatból kiolvashatók pozitív x-ekre. Negatív x esetén a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ azonosságot használhatjuk.

Ha $X \sim N(m, s^2)$, akkor az ő **sztenderdizált**ja $Z := \frac{X-m}{s} \sim N(0,1)$.

5. feladat Egy új adózási törvényt úgy szerkesztenek meg, hogy az kedvezzen a "középosztálybeli" családoknak, vagyis azoknak, amelyeknek a jövedelme \$20000 and \$30000 között van. Ha a családok jövedelme normális eloszlást követ \$25000 várható értékkel és $\$10000^2$, varianciával, akkor a családok hány százalékának kedvez a törvény?

Megoldásvázlat Legyen X egy család jövedelme \$1000-ban és Z a sztenderdizáltja. Ekkor $X \sim N(25, 10^2)$, így

$$\mathbb{P}(20 < X < 30) = \mathbb{P}(-0.5 < Z < 0.5) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \approx 0.383.$$

6. feladat Az A4-et tanuló diákok végső százalékpontos eredményei normális eloszlásúnak tekinthetők 65 várható értékkel és 15 szórással.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerű diák közepest (3-ast) kap (azaz, a pontja 60 és 70 pont közé esik)?

(b) Az átment diákok (azok, akik legalább 50 pontot értek el) hány százaléka kap közepest?

Megoldásvázlat Legyen X egy véletlenszerűen választott diák százalékpontos eredménye. Ekkor $X \sim N(65, 15^2)$.

(a) $\mathbb{P}(60 < X < 70) = 2\Phi\left(\frac{2}{3}\right) - 1 \approx 0.2586$

(b) $\mathbb{P}(60 < X < 70 \,|\, X > 50) = \frac{2\Phi\left(\frac{2}{3}\right)-1}{\Phi(1)} \approx 0.31$

7. feladat Dohányosok nikotinszintje normális eloszlású valószínűségi változóval modellezhető, melynek várható értéke 315, szórásnégyzete 17 161.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje meghaladja a 450-et?

(b) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje 150 és 400 közé esik?

(c) Mi az a nikotinszint, amely fölöttivel a dohányosok 5%-a bír?

(d) Mi a valószínűsége, hogy egy dohányos nikotinszintje 400-nál magasabb, feltéve, hogy az az átlagnál magasabb?

Megoldásvázlat Legyen X egy véletlenszerűen választott dohányos nikotinszintje. Ekkor a feladat alapján $X \sim N(315, 131^2)$. Így

(a) $\mathbb{P}(X > 450) = 1 - \Phi\left(\frac{135}{131}\right) \approx 0.1515$

(b) $\mathbb{P}(150 < X < 400) = \Phi\left(\frac{85}{131}\right) + \Phi\left(\frac{165}{131}\right) - 1 \approx 0.6384$

(c) Kell a, amire $\mathbb{P}(X > a) = 0.05$, azaz $\Phi\left(\frac{a-315}{131}\right) = 0.95$, amiből $a \approx 531.2$.

(d) $\mathbb{P}(X > 400 \,|\, X > 315) = \frac{1-\Phi\left(\frac{85}{131}\right)}{1/2} \approx 0.5156$

Centrális határeloszlás-tétel

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}(X_i) = m$, $\mathbb{D}(X_i) = s$ minden $i = 1, 2, \ldots$ esetén. Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ekkor minden $a \in \mathbb{R}$ konstansra

$$\lim_n \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \cdot m}{s \cdot \sqrt{n}} \leq a\right) = \Phi(a).$$

Ennek speciális esete, amikor $X_i \sim \mathrm{BER}(p)$. Ekkor $S_n \sim \mathrm{BIN}(n, p)$, így $m = p$, $s = \sqrt{p(1-p)}$. Ezt nevezik **de Moivre–Laplace-tétel**nek.

Ha S_n egy egészértékű változó, akkor pontosabb eredményt kapunk, ha **folytonossági korrekció**t használunk, azaz $\mathbb{P}(S_n = i)$ helyett $\mathbb{P}\left(i - \frac{1}{2} < S_n < i + \frac{1}{2}\right)$-vel számolunk.

8. feladat Számos, gyermekek számára készített társasjátékban annyit kell előrelépnünk a bábuval, mint ahányast a kockával dobtunk. Legyen n dobás után a pozíciónk S_n. Mi a közelítő valószínűsége, hogy 30 dobás után a pozíciónk 90 és 120 közé esik (a határokat is beleértve)? Egy kockadobás szórása $\sqrt{35/12}$.

Megoldásvázlat

$$\mathbb{P}(90 \leq S_{30} \leq 120) \overset{\text{folytonossági korrekció}}{=} \mathbb{P}(89.5 < S_{30} < 120.5) \overset{CHT}{\approx} 2\Phi\left(\frac{31}{\sqrt{350}}\right) - 1 \approx 0.8904$$

9. feladat Egy félvezető chipeket gyártó cég termékeinek 6.3%-a selejt. Ha a napi termelés mennyisége 2000 darab, mennyi a közelítő valószínűsége annak, hogy köztük 135-nél kevesebb selejt lesz?

Megoldásvázlat Jelölje S_n az n termék közül a selejtesek számát. Ekkor

$$\mathbb{P}(S_{2000} < 135) = \mathbb{P}(S_{2000} < 134.5) \approx \Phi\left(\frac{134.5 - 2000 \cdot 0.063}{\sqrt{2000 \cdot 0.063 \cdot 0.937}}\right) \approx 0.7823.$$

10. feladat Egy raktárban 101 láda van, melyek súlyai egymástól független és – kg-ban véve – a $(20, 40)$ számközben egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Egy 3t teherbírású teherautó érkezik, melyre elkezdik felpakolni a ládákat. Becsülje meg annak valószínűségét, hogy mind a 101 láda felrakható a teherautóra!

Megoldásvázlat Legyen M egy láda tömege és S_n n láda össztömege. Ekkor $M \sim \mathrm{UNI}(20, 40)$, így $\mathbb{E}(M) = 30$, $\mathbb{D}(M) = \frac{20}{\sqrt{12}}$. Ebből

$$\mathbb{P}(S_{101} < 3000) \approx \Phi\left(\frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{101}}\right) \approx 0.3015.$$

11. feladat Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk!

Megoldásvázlat Legyen X egy égő élettartama és S_n n égő összélettartama. Ekkor $X \sim \mathrm{EXP}\left(\frac{1}{5}\right)$, így

$$\mathbb{P}(S_{100} > 525) \approx 1 - \Phi(0.1) \approx 0.4602.$$

12. feladat Egy gyár kétfajta érmét gyárt: egy igazságosat, és egy hamisat ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?

Megoldásvázlat Legyen I és H a dobott fejek száma az igazságos, illetve a hamis érme esetén. Ekkor $I \sim \mathrm{BIN}(1000, 0.5)$, $H \sim \mathrm{BIN}(1000, 0.55)$. Így annak a valószínűsége, hogy a teszt téved:

$$\mathbb{P}(I \geq 525) = \mathbb{P}(I > 524.5) \approx 1 - \Phi\left(\frac{24.5}{\sqrt{250}}\right) \approx 0.0606,$$

$$\mathbb{P}(H < 525) = \mathbb{P}(H < 524.5) \approx \Phi\left(\frac{-25.5}{\sqrt{1000 \cdot 0.55 \cdot 0.45}}\right) \approx 0.0526.$$