

# Matematika A4 - Valószínűségszámítás 7. gyakorlat

## CHT, változók transzformációja, konvolúció

### Centrális határeloszlás-tétel

**1. feladat** Egy kollégiumban az üres férőhelyek száma 150. Egy ide jelentkező hallgató 0.6 valószínűséggel felel meg a felvételi követelményeknek. Ha 240-en jelentkeznek, akkor mi a közelítő valószínűsége, hogy a felvettek közül senkit sem kell átirányítani másik kollégiumba?

### Változók transzformációja

Legyen  $Y = g(X)$ .

- Ha  $g$  függvény szigorúan monoton növekvő:  $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$ ,  $f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}$ .
- Ha  $g$  szigorúan monoton csökkenő:  $F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$ ,  $f_Y(y) = -\frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}$ .
- $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x) dx$ ,  $\mathbb{D}^2(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 f_X(x) dx - \mathbb{E}(Y)^2$ .

**2. feladat** Vegyük azt az  $X$  folytonos eloszlást, amelynek a sűrűségfüggvénye  $f(x) = 2x$ , ha  $x \in (0, 1)$ , egyébként 0. Mi lesz az  $Y = 3 + 5X$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Vizsgáljuk a várható értéket!

**3. feladat** Van egy 25 óra várható értékű exponenciális eloszlás szerint kiégő égőnk. A barátommal a következő játékot játszunk: fizetek neki 625 forintot, és ha kiég az égő, akkor ő kifizeti nekem az égő órákban mért élettartalmának négyzetét. Kinek előnyös a játék? Számoljuk ki a barátom által fizetett pénz eloszlását!

**4. feladat** Legyen  $X$  valószínűségi változó egyenletes eloszlású a  $[0, 1]$  intervallumon. Határozzuk meg az alábbi változók eloszlását! Hogyan változik a várható érték és szórás?

- (a)  $\sqrt{X}$    (b)  $X^2$    (c)  $X^{-\frac{1}{2}}$    (d)  $X^{-1}$    (e)  $X^{-2}$

**5. feladat** Legyen  $X$  2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mi lesz  $X^k$  eloszlása?

**6. feladat** Legyen  $X$  egyenletes eloszlású az  $[5, 8]$  intervallumon. Számoljuk ki az eloszlás- és sűrűségfüggvényét az alábbi változóknak!

- (a)  $|X - 6|$    (b)  $X^2$

**7. feladat** Legyen  $X$  egy 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg  $Y = \ln(X)$  sűrűségfüggvényét.

**8. feladat** Legyen  $X$  normális eloszlású  $\mu$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással. Mi lesz  $Z := aX + b$  eloszlása?

### Konvolúció

Legyen  $X$  és  $Y$  független valószínűségi változók.

Ha  $X$  és  $Y$  diszkrét:  $\mathbb{P}(X + Y = m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}(Y = m - k)$ .

Ha  $X$  és  $Y$  folytonos:  $f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(t - x) dx$ .

- $X \sim \text{BIN}(n, p)$ ,  $Y \sim \text{BIN}(m, p)$  független, akkor  $X + Y \sim \text{BIN}(n + m, p)$
- $X \sim \text{POI}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{POI}(\mu)$  független, akkor  $X + Y \sim \text{POI}(\lambda + \mu)$
- Ritkított Poisson:  $X \sim \text{POI}(\lambda)$  és  $X$  darab pont egymástól függetlenül  $p$  valószínűséggel piros, akkor a piros pontok számának eloszlása  $\text{POI}(p\lambda)$
- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{EXP}(\lambda)$  függetlenek, akkor  $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$

**9. feladat** Egy adott helyen átlagosan évente ötször van földrengés.

- (a) A földrengéseknek 20%-a jár cunamival. Mi a valószínűsége, hogy egy évben több, mint 2 cunami van?
- (b) Egy évben átlagosan tízszer történnek erdőtűzek. Mi annak a valószínűsége, hogy egy évben pontosan 8 természeti katasztrófa (földrengés vagy erdőtűz) következik be?

**10. feladat** Egy villamosmérnök hallgató A4 zh-ra készül.

- (a) Úgy dönt, hogy addig csinál korábbi zh feladatsorokat, amíg valamelyik nem lesz hibátlan. Mivel közben már nem tanul, minden feladatsort egymástól függetlenül 20%-os valószínűséggel írja meg hibátlanul. Viszont pont mikor írt egy hibátlant, az egyik csoporttársától kap még 8 feladatsort, amik között állítólag ott van a másnapi zh. Sajnos már nagyon fáradt, ezért nem tudja mindet megnézni. Ehelyett mind a 8 feladatsorról külön-külön pénzfeldobással dönti el, hogy végigmenjen-e rajta. Mi valószínűsége, hogy pontosan  $m$  feladatsort old meg a gyakorlás során?
- (b) Nem volt szerencséje és pont kihagyta gyakorlásnál a tényleges feladatsort, így csak 4-est kapott. Természetesen ezután elkezd készülni a pótzh-ra, de új taktikával. A meglévő 10 darab pótzh feladatsort egymástól függetlenül 75-75% eséllyel csinálja meg. Viszont mikor ezekkel elkészült, megint kap 5 extra feladatsort, amikről megint pénzfeldobással dönt. De most mindegyiknél kétszer dobja fel az érmét és csak akkor hagyja ki, ha két fejet dob. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 6 feladatsort csinál meg pótzh-ra készülve?

**11. feladat** Határozzuk meg két standard normális eloszlás konvolúcióját!

**12. feladat** Legyen  $X \sim \text{UNI}(0, 1)$  és  $Y \sim \text{UNI}(1, 3)$ . Határozzuk meg  $X + Y$  eloszlását!