Matematika A4 - Valószínűségszámítás 7. gyakorlat
CHT, változók transzformációja, konvolúció

Centrális határeloszlás-tétel

1. feladat Egy kollégiumban az üres férőhelyek száma 150. Egy ide jelentkező hallgató 0.6 valószínűséggel felel meg a felvételi követelményeknek. Ha 240-en jelentkeznek, akkor mi a közelítő valószínűsége, hogy a felvettek közül senkit sem kell átirányítani másik kollégiumba?

Megoldásvázlat Legyen X a felvettek száma. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \leq 150) \overset{\text{folyt. korr.}}{=} \mathbb{P}(X < 150.5) \approx \Phi\left(\frac{150.5 - 240 \cdot 0.6}{\sqrt{240 \cdot 0.6 \cdot 0.4}}\right) \approx 0.8051.$$

Változók transzformációja

Legyen $Y = g(X)$.

- Ha g függvény szigorúan monoton növő: $F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$, $f_Y(y) = \frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{g'(g^{-1}(y))}$.
- Ha g szigorúan monoton csökkenő: $F_Y(y) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right)$, $f_Y(y) = -\frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{g'(g^{-1}(y))}$.
- $\mathbb{E}(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$, $\mathbb{D}^2(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2$.

2. feladat Vegyük azt az X folytonos eloszlást, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$, ha $x \in (0,1)$, egyébként 0. Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Vizsgáljuk a várható értéket!

Megoldásvázlat $g(x) = 3 + 5x$ szigorúan monoton függvény és $g^{-1}(y) = \frac{y-3}{5}$.

Sűrűségfüggvénye a fenti képlet alapján: $f_Y(y) = \frac{2(y-3)}{25}$, ha $\frac{y-3}{5} \in (0,1)$, azaz $y \in (3,8)$. Egyébként $f_Y(y) = 0$.

Várható értéket többféleképpen is számolhatjuk:

- $\mathbb{E}(X) = \int\limits_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$, így $\mathbb{E}(Y) = 3 + 5\mathbb{E}(X) = \frac{19}{3}$
- Y sűrűségfüggvényéből: $\mathbb{E}(Y) = \int\limits_3^8 y \cdot \frac{2(y-3)}{25}\,\mathrm{d}y = \frac{19}{3}$
- Transzformált változó várható értékére vonatkozó képlettel: $\mathbb{E}(Y) = \int\limits_0^1 (3+5x) \cdot (2x)\,\mathrm{d}x = \frac{19}{3}$

3. feladat Van egy 25 óra várható értékű exponenciális eloszlás szerint kiégő égőnk. A barátommal a következő játékot játsszuk: fizetek neki 625 forintot, és ha kiég az égő, akkor ő kifizeti nekem az égő órákban mért élettartalmának négyzetét. Kinek előnyös a játék? Számoljuk ki a barátom által fizetett pénz eloszlását!

Megoldásvázlat Legyen X a kiégés ideje, $\mathbb{E}(X) = 25$, így $X \sim \mathrm{EXP}\left(\frac{1}{25}\right)$.

Legyen Y a nyeremény, azaz $Y = X^2 - 625$. $g(x) = x^2 - 625$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}_+$-on.

$\mathbb{E}(Y) = \int\limits_0^\infty (x^2 - 625) f(x)\,\mathrm{d}x$ parciális integrálással számolható vagy $\int\limits_0^\infty x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 625 + 625$ és $\int\limits_0^\infty 625 f_X(x)\,\mathrm{d}x = 625 \int\limits_0^\infty f_X(x)\,\mathrm{d}x = 625$, így $\mathbb{E}(Y) = 625$, vagyis nekem előnyös a játék.

$g^{-1}(y) = \sqrt{y + 625}$, így Y eloszlásfüggvénye $F_Y(y) = 1 - e^{-\frac{1}{25}\sqrt{y+625}}$, ha $y \geq -625$, egyébként $F_Y(y) = 0$.

4. feladat Legyen X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Határozzuk meg az alábbi változók eloszlását! Hogyan változik a várható érték és szórás?
(a) $\sqrt{X}$ (b) X^2 (c) $X^{-\frac{1}{2}}$ (d) X^{-1} (e) X^{-2}

Megoldásvázlat

(a) Legyen $Y = \sqrt{X}$. Ekkor $g(x) = \sqrt{x}$ monoton növő $\mathbb{R}_+$-on, $g^{-1}(y) = y^2$, így

- $F_Y(y) = y^2$, ha $0 < y \leq 1$ ($F_Y(y) = 0$, ha $y \leq 0$, $F_Y(y) = 1$, ha $1 < y$)
- $\mathbb{E}(Y) = \int\limits_0^1 g(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$
- $\mathbb{D}^2(Y) = \int\limits_0^1 g(x)^2 \cdot 1 \,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{1}{18}$

(b) Legyen $Y = X^2$. Ekkor $g(x) = x^2$ monoton növő $\mathbb{R}_+$-on, $g^{-1}(y) = \sqrt{x}$, így

- $F_Y(y) = \sqrt{y}$, ha $0 < y \leq 1$ ($F_Y(y) = 0$, ha $y \leq 0$, $F_Y(y) = 1$, ha $1 < y$)
- $\mathbb{E}(Y) = \int\limits_0^1 g(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{D}^2(Y) = \int\limits_0^1 g(x)^2 \cdot 1 \,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{4}{45}$

(c) Legyen $Y = X^{-\frac{1}{2}}$. Ekkor $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ monoton csökkenő $\mathbb{R}_+$-on, $g^{-1}(y) = y^{-2}$, így

- $F_Y(y) = 1 - y^{-2}$, ha $1 \leq y$ ($F_Y(y) = 0$, ha $y < 1$)
- $\mathbb{E}(Y) = \int\limits_0^1 g(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x = 2$
- $\mathbb{D}^2(Y) = \int\limits_0^1 g(x)^2 \cdot 1 \,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2$ nem véges

(d) Legyen $Y = X^{-1}$. Ekkor $g(x) = x^{-1}$ monoton csökkenő $\mathbb{R}_+$-on, $g^{-1}(y) = y^{-1}$, így

- $F_Y(y) = 1 - y^{-1}$, ha $1 \leq y$ ($F_Y(y) = 0$, ha $y < 1$)
- $\mathbb{E}(Y) = \int\limits_0^1 g(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x$ nem véges
- $\mathbb{D}^2(Y) = \int\limits_0^1 g(x)^2 \cdot 1 \,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2$ nem véges

(e) Legyen $Y = X^{-2}$. Ekkor $g(x) = x^{-2}$ monoton csökkenő $\mathbb{R}_+$-on, $g^{-1}(y) = y^{-\frac{1}{2}}$, így

- $F_Y(y) = 1 - y^{-\frac{1}{2}}$, ha $1 \leq y$ ($F_Y(y) = 0$, ha $y < 1$)
- $\mathbb{E}(Y) = \int\limits_0^1 g(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x$ nem véges
- $\mathbb{D}^2(Y) = \int\limits_0^1 g(x)^2 \cdot 1 \,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2$ nem véges

5. feladat Legyen X 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mi lesz X^k eloszlása?

Megoldásvázlat $X \sim \mathrm{EXP}(2)$, $g(x) = x^k$ (szigorúan monoton nő $[0,\infty)$-n), $g^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$. Így, ha $Y = X^k$, akkor $f_Y(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot \sqrt[k]{y}} \cdot \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$.

6. feladat Legyen X egyenletes eloszlású az $[5,8]$ intervallumon. Számoljuk ki az eloszlás- és sűrűségfüggvényét az alábbi változóknak!
(a) $|X - 6|$ (b) X^2

Megoldásvázlat

(a) $Y = |X-6|$. $g(x) = |x-6|$ nem monoton az adott intervallumon. Viszont $F_Y(y) = \mathbb{P}(|X-6| \leq y)$ szakaszonként meghatározható:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } y \leq 0 \\ \frac{2y}{3} & \text{, ha } 0 < y \leq 1 \\ \frac{1+y}{3} & \text{, ha } 1 < y \leq 2 \\ 1 & \text{, ha } 2 < y \end{cases}$$

Ebből a sűrűségfüggvény:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{, ha } 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{, ha } 1 < y \leq 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(b) $Y = X^2$. $g(x) = x^2$ szigorúan monoton növő az adott intervallumon, $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Ebből

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } y \leq 25 \\ \frac{\sqrt{y}-5}{3} & \text{, ha } 25 < y \leq 64 \\ 1 & \text{, ha } 64 < y \end{cases}$$

Ebből a sűrűségfüggvény:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{y}} & \text{, ha } 25 < y \leq 64 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

7. feladat Legyen X egy 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $Y = \ln(X)$ sűrűségfüggvényét.

Megoldásvázlat $g(x) = \ln(x)$ szigorúan monoton nő, $g^{-1}(y) = e^y$, így $f_Y(y) = e^{e^y+y}$.

8. feladat Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Mi lesz $Z := aX + b$ eloszlása?

Megoldásvázlat $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} \cdot e^{-\frac{(z-b-a\mu)^2}{2(\sigma a)^2}}$, vagyis $Z \sim N(b + a\mu, a\sigma)$.

Konvolúció

Legyen X és Y független valószínűségi változók.

Ha X és Y diszkrét: $\mathbb{P}(X + Y = m) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}(Y = m - k)$.

Ha X és Y folytonos: $f_{X+Y}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(t - x)\,\mathrm{d}x$.

- $X \sim \mathrm{BIN}(n, p)$, $Y \sim \mathrm{BIN}(m, p)$ független, akkor $X + Y \sim \mathrm{BIN}(n + m, p)$
- $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{POI}(\mu)$ független, akkor $X + Y \sim \mathrm{POI}(\lambda + \mu)$
- Ritkított Poisson: $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$ és X darab pont egymástól függetlenül p valószínűséggel piros, akkor a piros pontok számának eloszlása $\mathrm{POI}(p\lambda)$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ függetlenek, akkor $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Erlang}(n, \lambda)$

9. feladat Egy adott helyen átlagosan évente ötször van földrengés.

(a) A földrengéseknek 20%-a jár cunamival. Mi a valószínűsége, hogy egy évben több, mint 2 cunami van?

(b) Egy évben átlagosan tízszer történnek erdőtüzek. Mi annak a valószínűsége, hogy egy évben pontosan 8 természeti katasztrófa (földrengés vagy erdőtűz) következik be?

Megoldásvázlat

(a) Földrengések számának eloszlása $F \sim \mathrm{POI}(5)$. Poisson ritkítás alapján a cunamik számának eloszlása $C \sim \mathrm{POI}(1)$, így
$$\mathbb{P}(C > 2) = 1 - 2.5e^{-1}.$$

(b) Az erdőtüzek számának eloszlása $E \sim \mathrm{POI}(10)$. Így a katasztrófák száma $K = F+E \sim \mathrm{POI}(15)$. Vagyis
$$\mathbb{P}(K = 8) = e^{-15} \cdot \frac{15^8}{8!}.$$

10. feladat Egy villamosmérnök hallgató A4 zh-ra készül.

(a) Úgy dönt, hogy addig csinál korábbi zh feladatsorokat, amíg valamelyik nem lesz hibátlan. Mivel közben már nem tanul, minden feladatsort egymástól függetlenül 20%-os valószínűséggel írja meg hibátlanul. Viszont pont mikor írt egy hibátlant, az egyik csoporttársától kap még 8 feladatsort, amik között állítólag ott van a másnapi zh. Sajnos már nagyon fáradt, ezért nem tudja mindet megnézni. Ehelyett mind a 8 feladatsorról külön-külön pénzfeldobással dönti el, hogy végigmenjen-e rajta. Mi valószínűsége, hogy pontosan m feladatsort old meg a gyakorlás során?

(b) Nem volt szerencséje és pont kihagyta gyakorlásnál a tényleges feladatsort, így csak 4-est kapott. Természetesen ezután elkezd készülni a pótzh-ra, de új taktikával. A meglévő 10 darab pótzh feladatsort egymástól függetlenül 75-75% esséllyel csinálja meg. Viszont mikor ezekkel elkészült, megint kap 5 extra feladatsort, amikről megint pénzfeldobással dönt. De most mindegyiknél kétszer dobja fel az érmét és csak akkor hagyja ki, ha két fejet dob. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 6 feladatsort csinál meg pótzh-ra készülve?

Megoldásvázlat

(a) Legyen X és Y az eredeti és az extra feladatsorokból megoldottak száma. Ekkor $X \sim \mathrm{GEO}(0.2)$, $Y \sim \mathrm{BIN}(8, 0.5)$. Ha Z a megoldott feladatsorok száma, akkor $Z = X + Y$, így
$$\mathbb{P}(Z = m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = m - k) \cdot \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{\min(8,m-1)} 0.8^{m-k-1} \cdot 0.2 \cdot \binom{8}{k} \cdot 0.5^8.$$

(b) Legyen X és Y az eredeti és az extra feladatsorokból megoldottak száma. Ekkor a feladat alapján $X \sim \mathrm{BIN}(10, 0.75)$, $Y \sim \mathrm{BIN}(5, 0.75)$, így $Z := X + Y \sim \mathrm{BIN}(15, 0.75)$. Így
$$\mathbb{P}(Z = 6) = \binom{15}{6} \cdot 0.75^6 \cdot 0.25^9.$$

11. feladat Határozzuk meg két standard normális eloszlás konvolúcióját!

Megoldásvázlat $X, Y \sim N(0, 1), Z := X + Y$

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) \,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-y)^2+y^2}{2}} \,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}/\sqrt{2}} e^{-\frac{(y-z/2)^2}{2/2}} \,\mathrm{d}y \cdot e^{-z^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/4},$$

hiszen az utolsó integrálban épp $N\left(\frac{z}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ eloszlás sűrűségfüggvénye van, így az integrál értéke 1. Így $Z \sim N(0, \sqrt{2})$.

12. feladat Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(0, 1)$ és $Y \sim \mathrm{UNI}(1, 3)$. Határozzuk meg $X + Y$ eloszlását!

Megoldásvázlat $f_X(x) = 1$, ha $x \in (0,1)$ és $f_Y(y) = \frac{1}{2}$, ha $y \in (1,3)$, egyébként a sűrűségfüggvények értéke 0. Így

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\,\mathrm{d}x = \int_{\max(0,t-3)}^{\min(1,t-1)} \frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

Vagyis $f_{X+Y}(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{2} & \text{, ha } 1 < y \leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{, ha } 2 < y \leq 3 \\ \frac{4-t}{2} & \text{, ha } 3 < y \leq 4 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$