Matematika A4 - Valószínűségszámítás 8. gyakorlat
Konvolúció, diszkrét változók transzformációja, geometriai valószínűség, feltételes várható érték, teljes várható érték tétel

Konvolúció

Legyen X és Y független valószínűségi változók.

Ha X és Y diszkrét: $\mathbb{P}(X+Y=m) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\cdot\mathbb{P}(Y=m-k)$.

Ha X és Y folytonos: $f_{X+Y}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(t-x)\,\mathrm{d}x$.

1. feladat Egy villamosmérnök hallgató A4 zh-ra készül.

(a) Úgy dönt, hogy addig csinál korábbi zh feladatsorokat, amíg valamelyik nem lesz hibátlan. Mivel közben már nem tanul, minden feladatsort egymástól függetlenül 20%-os valószínűséggel írja meg hibátlanul. Viszont pont mikor írt egy hibátlant, az egyik csoporttársától kap még 8 feladatsort, amik között állítólag ott van a másnapi zh. Sajnos már nagyon fáradt, ezért nem tudja mindet megnézni. Ehelyett mind a 8 feladatsorról külön-külön pénzfeldobással dönti el, hogy végigmenjen-e rajta. Mi valószínűsége, hogy pontosan m feladatsort old meg a gyakorlás során?

(b) Nem volt szerencséje és pont kihagyta gyakorlásnál a tényleges feladatsort, így csak 4-est kapott. Természetesen ezután elkezd készülni a pótzh-ra, de új taktikával. A meglévő 10 darab pótzh feladatsort egymástól függetlenül 75-75% eséllyel csinálja meg. Viszont mikor ezekkel elkészült, megint kap 5 extra feladatsort, amikről megint pénzfeldobással dönt. De most mindegyiknél kétszer dobja fel az érmét és csak akkor hagyja ki, ha két fejet dob. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 6 feladatsort csinál meg pótzh-ra készülve?

2. feladat Határozzuk meg két standard normális eloszlás konvolúcióját!

3. feladat Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(0,1)$ és $Y \sim \mathrm{UNI}(1,3)$. Határozzuk meg $X+Y$ eloszlását!

Diszkrét változók transzformációja

4. feladat Ha $X \sim \mathrm{GEO}(p)$, akkor mi az alábbi Y változók súlyfüggvénye, várható értéke, szórása?
(a) $Y = 3X-2$ (b) $Y = e^X$

Geometriai valószínűség

5. feladat A $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ csúcsú háromszögön vett egyenletes eloszlás esetén határozzuk meg $Z = Y/X$ eloszlását!

6. feladat Vegyünk egy két dimenziós (X,Y) eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = 4xy$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

Feltételes várható érték, teljes várható érték tétele (diszkrét)

- X feltételes várható értéke,
  - ha az A esemény adott: $\mathbb{E}(X|A) = \sum\limits_k \mathbb{P}(X=k|A)\cdot k$.
  - adott Y valószínűségi változó esetén: $\mathbb{E}(X|Y=y) = \sum\limits_k \mathbb{P}(X=k|Y=y)\cdot k$.
- Teljes várható érték tétele: $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_m \mathbb{P}(Y=m)\cdot\mathbb{E}(X|Y=m)$, azaz $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$.

7. feladat Kétszer dobtunk egy kockával. Mennyi az első dobás feltételes várható értéke, ha ismerjük a dobások összegét? Mennyi a feltételes várható értéke az első dobásnak, ha tudjuk, hogy a két dobás összege 10?

8. feladat Dobjunk egy érmével annyiszor, amennyit egy szabályos kockával dobtunk. Jelölje X a fejek számát. Mennyi $\mathbb{E}(X)$?

Ismétlés

9. feladat Egy sportlövő 0.9 valószínűséggel lő 10-est. Egy lövéssorozat 10 lövésből áll és akkor elfogadható számára, ha legalább 9 tízes találat van benne. Mi a valószínűsége, hogy három lövéssorozat mindegyike elfogadható lesz?

10. feladat Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg a következő mennyiségeket:
(a) $\mathbb{E}\left[(2+X)^2\right]$ (b) $\mathbb{D}^2(4+3X)$

11. feladat Egy adott területen a földrengések erejei egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melynek paramétere $\frac{5}{12}$ a Richter skálán. Mi a valószínűsége, hogy a következő

(a) földrengés ereje meghaladja a 4-et?

(b) két földrengés egyike sem lesz 4-nél erősebb?

12. feladat Tegyük fel, hogy egy villanykörte élettartama (évben) $1/2$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

(a) Mennyi a várható élettartama?

(b) Mi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 2 évig ég?

(c) Mi a valószínűsége, hogy több, mint 1 évig nem ég ki?

(d) Mi a valószínűsége, hogy mostantól kezdve egy napig ég, de utána a következő nap folyamán kiég?

(e) Feltéve, hogy 1 évig nem ég ki, mi a valószínűsége, hogy utána még legalább negyed évig működni fog?

(f) Mindig amint kiég, kicserélem az égőt egy ugyanolyan típusú új égőre. Mi a valószínűsége, hogy a következő 10 évben legalább 4 égőre van szükségem?

13. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0,1)$, egyébként az értéke 0. Mennyi a c konstans értéke? Mi az X várható értéke?

14. feladat Egy új adózási törvényt úgy szerkesztenek meg, hogy az kedvezzen a "középosztálybeli" családoknak, vagyis azoknak, amelyeknek a jövedelme \$20000 and \$30000 között van. Ha a családok jövedelme normális eloszlást követ \$25000 várható értékkel és $\$10000^2$, varianciával, akkor a családok hány százalékának kedvez a törvény?

15. feladat Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk!

16. feladat Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Mi lesz $Z := aX + b$ eloszlása?