Matematika A4 - Valószínűségszámítás 8. gyakorlat
Konvolúció, diszkrét változók transzformációja, geometriai valószínűség, feltételes várható érték, teljes várható érték tétel

Konvolúció

Legyen X és Y független valószínűségi változók.

Ha X és Y diszkrét: $\mathbb{P}(X+Y=m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\cdot\mathbb{P}(Y=m-k)$.

Ha X és Y folytonos: $f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(t-x)\,\mathrm{d}x$.

1. feladat Egy villamosmérnök hallgató A4 zh-ra készül.

(a) Úgy dönt, hogy addig csinál korábbi zh feladatsorokat, amíg valamelyik nem lesz hibátlan. Mivel közben már nem tanul, minden feladatsort egymástól függetlenül 20%-os valószínűséggel írja meg hibátlanul. Viszont pont mikor írt egy hibátlant, az egyik csoporttársától kap még 8 feladatsort, amik között állítólag ott van a másnapi zh. Sajnos már nagyon fáradt, ezért nem tudja mindet megnézni. Ehelyett mind a 8 feladatsorról külön-külön pénzfeldobással dönti el, hogy végigmenjen-e rajta. Mi valószínűsége, hogy pontosan m feladatsort old meg a gyakorlás során?

(b) Nem volt szerencséje és pont kihagyta gyakorlásnál a tényleges feladatsort, így csak 4-est kapott. Természetesen ezután elkezd készülni a pótzh-ra, de új taktikával. A meglévő 10 darab pótzh feladatsort egymástól függetlenül 75-75% eséllyel csinálja meg. Viszont mikor ezekkel elkészült, megint kap 5 extra feladatsort, amikről megint pénzfeldobással dönt. De most mindegyiknél kétszer dobja fel az érmét és csak akkor hagyja ki, ha két fejet dob. Mi a valószínűsége, hogy pontosan 6 feladatsort csinál meg pótzh-ra készülve?

Megoldásvázlat

(a) Legyen X és Y az eredeti és az extra feladatsorokból megoldottak száma. Ekkor $X \sim \mathrm{GEO}(0.2)$, $Y \sim \mathrm{BIN}(8, 0.5)$. Ha Z a megoldott feladatsorok száma, akkor $Z = X + Y$, így

$$\mathbb{P}(Z=m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X=m-k)\cdot\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=0}^{\min(8,m-1)} 0.8^{m-k-1}\cdot 0.2\cdot\binom{8}{k}\cdot 0.5^8.$$

(b) Legyen X és Y az eredeti és az extra feladatsorokból megoldottak száma. Ekkor a feladat alapján $X \sim \mathrm{BIN}(10, 0.75)$, $Y \sim \mathrm{BIN}(5, 0.75)$, így $Z := X + Y \sim \mathrm{BIN}(15, 0.75)$. Így

$$\mathbb{P}(Z=6) = \binom{15}{6}\cdot 0.75^6\cdot 0.25^9.$$

2. feladat Határozzuk meg két standard normális eloszlás konvolúcióját!

Megoldásvázlat $X, Y \sim N(0,1), Z := X + Y$

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-y)^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}/\sqrt{2}} e^{-\frac{(y-z/2)^2}{2/2}}\,\mathrm{d}y\cdot e^{-z^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-z^2/4},$$

hiszen az utolsó integrálban épp $N\left(\frac{z}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ eloszlás sűrűségfüggvénye van, így az integrál értéke 1. Így $Z \sim N(0, \sqrt{2})$.

3. feladat Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(0,1)$ és $Y \sim \mathrm{UNI}(1,3)$. Határozzuk meg $X + Y$ eloszlását!

Megoldásvázlat $f_X(x) = 1$, ha $x \in (0,1)$ és $f_Y(y) = \frac{1}{2}$, ha $y \in (1,3)$, egyébként a sűrűségfüggvények értéke 0. Így

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\,\mathrm{d}x = \int_{\max(0,t-3)}^{\min(1,t-1)} \frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

Vagyis $f_{X+Y}(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{2} & \text{, ha } 1 < y \le 2 \\ \frac{1}{2} & \text{, ha } 2 < y \le 3 \\ \frac{4-t}{2} & \text{, ha } 3 < y \le 4 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

Diszkrét változók transzformációja

4. feladat Ha $X \sim \mathrm{GEO}(p)$, akkor mi az alábbi Y változók súlyfüggvénye, várható értéke, szórása?
(a) $Y = 3X - 2$ (b) $Y = e^X$

Megoldásvázlat

(a) $Y = 3X - 2$ esetén:

$$\mathbb{P}_Y(k) = \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(3X - 2 = k) = \mathbb{P}\left(X = \frac{k+2}{3}\right) = (1-p)^{\frac{k-1}{3}} p,$$

ha $\frac{k+2}{3}$ pozitív egész, azaz $k \in \{1, 4, 7, \dots\}$.
Várható érték tulajdonságai alapján:

$$\mathbb{E}(Y) = 3\mathbb{E}(X) - 2 = \frac{3}{p} - 2.$$

Szórásnégyzet tulajdonságai alapján:

$$\mathbb{D}^2(Y) = 9\mathbb{D}^2(X) = \frac{9(1-p)}{p^2}.$$

(b) $Y = e^X$ esetén:

$$p_Y(k) = \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(e^X = k\right) = \mathbb{P}\left(X = \ln k\right) = (1-p)^{\ln k - 1} p,$$

ha $\ln k$ pozitív egész, azaz $k \in \{e, e^2, e^3, \dots\}$.
Várható érték és szórásnégyzet definíció alapján számolható:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^k (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (e(1-p))^k \stackrel{(*)}{=} \frac{ep}{1 - e + ep},$$

ha $p > 1 - \frac{1}{e}$, egyébként a várható érték nem létezik. $(*)$-nál azt használtuk, hogy $q > 0$ esetén $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$, ha $q < 1$, egyébként a sor nem konvergens.
Ehhez hasonlóan

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{2k} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^2(1-p)\right)^k \stackrel{(*)}{=} \frac{e^2 p}{1 - e^2 + e^2 p},$$

ha $p > 1 - \frac{1}{e^2}$, egyébként a várható érték nem létezik. Ebből $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}(Y)^2$.

Geometriai valószínűség

5. feladat A $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ csúcsú háromszögön vett egyenletes eloszlás esetén határozzuk meg $Z = Y/X$ eloszlását!

Megoldásvázlat Z értéke definíciója alapján 0 és 1 között van. Így $z \in (0,1)$ esetén:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z < z) = \mathbb{P}(Y < z \cdot X) \overset{(*)}{=} \frac{z/2}{1/2} = z,$$

ahol$(*)$-nál azt használtuk, hogy a háromszög azon részének a területe, ahol $y < z \cdot x$, az $z/2$, míg az egész háromszög területe 1/2 (egyenletes eloszlás miatt a valószínűségek arányosak a területekkel).

A kapott eloszlásfüggvényből látjuk, hogy $Z \sim \mathrm{UNI}(0,1)$.

6. feladat Vegyünk egy két dimenziós (X,Y) eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = 4xy$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

Megoldásvázlat

- U értéke definíciója alapján 0 és 1 között van. Így $u \in (0,1)$ esetén:

  $$F_U(u) = \mathbb{P}(U < u) = \mathbb{P}\left(Y < u \cdot \frac{1}{X}\right) \overset{(*)}{=} 1 - \int_u^1 \int_{u/x}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = ... = u^2 - 2u^2 \ln u,$$

  ahol $(*)$-nál azt használtuk, hogy azok a pontok az egységnégyzeten, amelyekre $y < u \cdot \frac{1}{x}$ NEM teljesül az épp $\{(x,y) : u \le x \le 1, u/x \le y \le 1\}$.

  Ebből deriválással a sűrűségfüggvény $f_U(u) = 4u \ln u$, ha $u \in (0,1)$, egyébként $f_U(u) = 0$.

- V értéke definíciója alapján 0 és ∞ között van. Viszont rajz alapján látjuk, hogy $v < 1$ és $v \ge 1$ eseteket külön kell kezelni. Így $v \in (0,1)$ esetén:

  $$F_V(v) = \mathbb{P}(V < v) = \mathbb{P}(Y < vX) \overset{(*)}{=} \int_0^1 \int_0^{vx} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = ... = \frac{v^2}{2},$$

  ahol $(*)$-nál azt használtuk, hogy azok a pontok az egységnégyzeten, amelyekre $y < vx$ teljesül az épp $\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le vx\}$.

  $v \in (1,\infty)$ esetén:

  $$F_V(v) = \mathbb{P}(V < v) = \mathbb{P}(Y < uX) \overset{(*)}{=} 1 - \int_0^1 \int_0^{y/v} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ... = 1 - \frac{1}{2v^2},$$

  ahol $(*)$-nál azt használtuk, hogy azok a pontok az egységnégyzeten, amelyekre $y < vx$ NEM teljesül az épp $\{(x,y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y/v\}$.

  Ebből deriválással a sűrűségfüggvény $f_V(v) = v$, ha $v \in (0,1)$, míg $f_V(v) = v^{-3}$, ha $v \in (1,\infty)$ egyébként $f_V(v) = 0$.

Feltételes várható érték, teljes várható érték tétele (diszkrét)

- X feltételes várható értéke,
  - ha az A esemény adott: $\mathbb{E}(X|A) = \sum_k \mathbb{P}(X = k|A) \cdot k$.
  - adott Y valószínűségi változó esetén: $\mathbb{E}(X|Y = y) = \sum_k \mathbb{P}(X = k|Y = y) \cdot k$.
- Teljes várható érték tétele: $\mathbb{E}(X) = \sum_m \mathbb{P}(Y = m) \cdot \mathbb{E}(X|Y = m)$, azaz $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$.

7. feladat Kétszer dobtunk egy kockával. Mennyi az első dobás feltételes várható értéke, ha ismerjük a dobások összegét? Mennyi a feltételes várható értéke az első dobásnak, ha tudjuk, hogy a két dobás összege 10?

Megoldásvázlat Legyen Y az első, Z a második dobás, X pedig a dobások összege. Világos, hogy $\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \mathbb{E}(Z \mid X = x)$, a szimmetria miatt. Viszont

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) + \mathbb{E}(Z \mid X = x) = \mathbb{E}(Y + Z \mid X = x) = x,$$

így $\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \frac{x}{2}$. Ha $x = 10$, akkor ez 5.

8. feladat Dobjunk egy érmével annyiszor, amennyit egy szabályos kockával dobtunk. Jelölje X a fejek számát. Mennyi $\mathbb{E}(X)$?

Megoldásvázlat Legyen A_i az az esemény, hogy a dobás értéke i. Ekkor a teljes várható érték tétel értelmében

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X|A_1)P(A_1) + \cdots + \mathbb{E}(X|A_6)P(A_6) = \frac{\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3\right)}{6} = \frac{7}{4},$$

ami teljesen természetes, hiszen a kockadobás várható értéke 3,5 és várhatóan ezek fele lesz a fejre eső érmék száma.

Ismétlés

9. feladat Egy sportlövő 0.9 valószínűséggel lő 10-est. Egy lövéssorozat 10 lövésből áll és akkor elfogadható számára, ha legalább 9 tízes találat van benne. Mi a valószínűsége, hogy három lövéssorozat mindegyike elfogadható lesz?

Megoldásvázlat Egy lövéssorozatban a 10-es lövések száma BIN(10,0.9) eloszlású. Így annak a valószínűsége, hogy egy lövéssorozat sikeres $0.9^{10} + 10 \cdot 0.9^9 \cdot 0.1 \approx 0.736$. Annak a valószínűsége, hogy mindhárom lövéssorozat sikeres $0.736^3 \approx 0.399$.

10. feladat Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg a következő mennyiségeket:
(a) $\mathbb{E}\left[(2 + X)^2\right]$ (b) $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$

Megoldásvázlat

(a) 14

(b) 45

11. feladat Egy adott területen a földrengések erejei egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melynek paramétere $\frac{5}{12}$ a Richter skálán. Mi a valószínűsége, hogy a következő

(a) földrengés ereje meghaladja a 4-et?

(b) két földrengés egyike sem lesz 4-nél erősebb?

Megoldásvázlat Legyen X, Y a következő két földrengés ereje.

(a) $\mathbb{P}(X > 4) = e^{-5/3}$

(b) $\mathbb{P}(X < 4, Y < 4) = \left(1 - e^{-5/3}\right)^2$

12. feladat Tegyük fel, hogy egy villanykörte élettartama (évben) 1/2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

(a) Mennyi a várható élettartama?

(b) Mi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 2 évig ég?

(c) Mi a valószínűsége, hogy több, mint 1 évig nem ég ki?

(d) Mi a valószínűsége, hogy mostantól kezdve egy napig ég, de utána a következő nap folyamán kiég?

(e) Feltéve, hogy 1 évig nem ég ki, mi a valószínűsége, hogy utána még legalább negyed évig működni fog?

(f) Mindig amint kiég, kicserélem az égőt egy ugyanolyan típusú új égőre. Mi a valószínűsége, hogy a következő 10 évben legalább 4 égőre van szükségem?

Megoldásvázlat Legyen az élettartam X.

(a) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 2$ év.

(b) $\mathbb{P}(X < 2) = F(2) = 1 - e^{-0,5\cdot 2} = 1 - e^{-1} = 0,6321$.

(c) $\mathbb{P}(X > 1) = 1 - F(1) = e^{-\frac{1}{2}} = 0,6065$.

(d) $\mathbb{P}\left(\frac{1}{365} < X < \frac{2}{365}\right) = F\left(\frac{2}{365}\right) - F\left(\frac{1}{365}\right) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{365}} - e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{365}} = 0,1367\%$.

(e) Örökifjú tulajdonság miatt: $\mathbb{P}(X > 1,25 \,|\, X > 1) = \mathbb{P}(X > 0,25) = e^{-0,5\cdot 0,25} = 88,25\%$.

(f) Legyen Y a 10 év alatt kiégő égők száma. Ekkor $Y \sim \mathrm{POI}(5)$, így annak a valószínűsége, hogy legalább 4 égő kell (azaz legalább 3 kiég):

$$\mathbb{P}(Y \leq 3) = 1 - e^{-5} \cdot \left(1 + 5 + \frac{5^2}{2}\right) = 1 - 18,5e^{-5}.$$

13. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0,1)$, egyébként az értéke 0. Mennyi a c konstans értéke? Mi az X várható értéke?

Megoldásvázlat $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ egyenletből $c = 6$

Definíció alapján a várható érték $\frac{1}{2}$.

14. feladat Egy új adózási törvényt úgy szerkesztenek meg, hogy az kedvezzen a "középosztálybeli" családoknak, vagyis azoknak, amelyeknek a jövedelme \$20000 and \$30000 között van. Ha a családok jövedelme normális eloszlást követ \$25000 várható értékkel és $\$10000^2$, varianciával, akkor a családok hány százalékának kedvez a törvény?

Megoldásvázlat Legyen X egy család jövedelme \$1000-ban és Z a sztenderdizáltja. Ekkor $X \sim N(25, 10^2)$, így

$$\mathbb{P}(20 < X < 30) = \mathbb{P}(-0.5 < Z < 0.5) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \approx 0.383.$$

15. feladat Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk!

Megoldásvázlat Legyen X egy égő élettartama és S_n n égő összélettartama. Ekkor $X \sim \mathrm{EXP}\left(\frac{1}{5}\right)$, így

$$\mathbb{P}(S_{100} > 525) \approx 1 - \Phi(0.1) \approx 0.4602.$$

16. feladat Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Mi lesz $Z := aX + b$ eloszlása?

Megoldásvázlat $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} \cdot e^{-\frac{(z-b-a\mu)^2}{2(\sigma a)^2}}$, vagyis $Z \sim N(b + a\mu, a\sigma)$.