Matematika A4 - Valószínűségszámítás 9. gyakorlat
Többváltozós eloszlások

Többváltozós diszkrét eloszlások

- **Együttes súlyfüggvény:** $p(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$
- X és Y független: $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_j) \cdot \mathbb{P}(Y = y_j)$ minden i, j-re
- Peremsúlyfüggvény: $\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$, $\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$

1. feladat Először egy (szabályos) kockával dobunk, majd annyi (igazságos) érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és az érmékkel 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk? Adjuk meg az együttes-, perem- és feltételes eloszlásokat is!

2. feladat Két kockával dobva, mi a dobott számok

(a) összegének és különbségének

(b) minimumának és maximumának

az együttes eloszlása? Függetlenek-e a marginálisok egymástól? Legyen (X, Y) a részfeladatoknak megfelelő valószínűségi változó pár. Számítsuk ki $\mathrm{COV}(X, Y)$ értékét!

3. feladat Kockával dobunk addig, amíg először páratlan szám jön! Ehhez szükséges dobások számát jelölje N és legyen X az első páratlan dobás értéke. Mi az eloszlása X-nek, illetve N-nek? Független-e X N-től? Adjuk meg az együttes eloszlásukat is!

Többváltozós folytonos eloszlások

Együttes eloszlásfüggvény: $F(x, y) := \mathbb{P}(X < x, Y < y)$. Tulajdonságai:

- $0 \leq F(x, y) \leq 1$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, minden változójában balról folytonos és monoton növő
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$, $\lim\limits_{(x,y) \to (\infty, \infty)} F(x, y) = 1$

Együttes sűrűségfüggvény: $f(x, y) := \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$. Tulajdonságai:

- $0 \leq f(x, y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén
- $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 1$

Ebből tudunk valószínűségeket számolni: $\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \iint\limits_{A} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

Peremeloszlás- és sűrűségfüggvény (marginális):

- $F_X(x) = \lim\limits_{y \to \infty} F(x, y)$, $F_Y(y) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x, y)$
- $f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x, y) \,\mathrm{d}y$, $f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x, y) \,\mathrm{d}x$
- X és Y független, ha $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, vagyis $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ minden x, y esetén

Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény:

- $F_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X < x \mid Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)} \cdot \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, $F_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}(Y < y \mid X = x) = \frac{1}{f_X(x)} \cdot \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{\partial F_{X|Y}(x|y)}{\partial x} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, $f_{Y|X}(y|x) = \frac{\partial F_{Y|X}(y|x)}{\partial y} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$
- Folytonos Bayes-formula: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)}{\int\limits_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) \,\mathrm{d}y}$

4. feladat Legyen $f(x,y) = \frac{c}{y}$, ha $0 < x < 1$ és $x < y < \frac{1}{x}$, egyébként pedig $f(x,y) = 0$.

(a) Határozzuk meg c értékét úgy, hogy $f(x,y)$ egy sűrűségfüggvény legyen!

(b) Határozzuk meg a peremeloszlás- és sűrűségfüggvényeket!

(c) Mik a feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvények?

(d) Mennyi $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X|Y=y)$, $\mathbb{E}(Y|X=x)$, $\mathbb{E}(XY)$, $\mathrm{COV}(X,Y)$?

(e) Független-e X és Y?

5. feladat A $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ csúcsú háromszögön vett egyenletes eloszlás esetén határozzuk meg $Z = Y/X$ eloszlását!

6. feladat Vegyünk egy két dimenziós (X,Y) eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = 4xy$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

7. feladat Egy (egységsugarú) körbe szabályos hatszöget rajzolunk. Mi a valószínűsége, hogy a körben egyenletesen választott pont a hatszögben is benne van?

8. feladat X_1, X_2, X_3 három véletlen pontot jelöl a $[0,3]$ intervallumból. Mi annak a valószínűsége, hogy az X_2 pont X_1 és X_3 között helyezkedik el?