

## Matematika A4 - Valószínűségszámítás 10. gyakorlat

### Többváltozós eloszlások, feltételes várható érték és variancia, vegyes eloszlás

- Kovariancia:  $\text{COV}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ , ahol  $\mathbb{E}(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \cdot xy \, dx \, dy$
- Feltételes várható érték:  $\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) \cdot x \, dx$
- Feltételes variancia:  $\mathbb{D}^2(X|Y = y) = \mathbb{E}(X^2|Y = y) - (\mathbb{E}(X|Y = y))^2$

**1. feladat** Legyen  $f(x, y) = \frac{c}{y}$ , ha  $0 < x < 1$  és  $x < y < \frac{1}{x}$ , egyébként pedig  $f(x, y) = 0$ .

- Határozzuk meg  $c$  értékét úgy, hogy  $f(x, y)$  egy sűrűségfüggvény legyen!
- Határozzuk meg a peremeloszlás- és sűrűségfüggvényeket!
- Mik a feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvények?
- Mennyi  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{E}(Y)$ ,  $\mathbb{E}(X|Y = y)$ ,  $\mathbb{E}(Y|X = x)$ ,  $\mathbb{E}(XY)$ ,  $\text{COV}(X, Y)$ ?
- Független-e  $X$  és  $Y$ ?
- Számoljuk ki a feltételes szórásnégyzeteket!

**2. feladat** A  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(1; 1)$  csúcsú háromszögon vett egyenletes eloszlás esetén határozzuk meg  $Z = Y/X$  eloszlását!

**3. feladat** Vegyünk egy két dimenziós  $(X, Y)$  eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye  $f(x, y) = 4xy$  ha  $0 < x < 1$  és  $0 < y < 1$ , egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön  $U = XY$  és  $V = Y/X$  eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

**4. feladat** Egy villamosmérnök A4 zh eredménye elsősorban a ~~gyakorlatvezető hangulatától~~ készülésre szánt időtől függ, aminek az eloszlása egyenletes 0 és 30 óra között. Ha a hallgató  $x$  órát készült, akkor a zh százalékos eredményének eloszlása szintén egyenletes, de  $3x$  és  $3x + 10$  százalék között. Ha tudjuk egy hallgató zh eredményét, akkor mit mondhatunk a készülésre szánt idejéről? (Vagyis adjuk meg a feltételes sűrűségfüggvényt!)

**5. feladat** Legyen  $(X, Y)$  eloszlása egyenletes azon a négyszögon, aminek a csúcsai

- $(1; 1)$ ,  $(3; 1)$ ,  $(3; 2)$ ,  $(1; 2)$ ,
  - $(1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; -1)$ .
- Adjuk meg  $(X, Y)$  együttes sűrűségfüggvényét!
  - Mik a marginális sűrűségfüggvények és várható értékek?
  - Független-e  $X$  és  $Y$ ?
  - Mik a feltételes sűrűségfüggvények, várható értékek, varianciák?
  - Mennyi  $\mathbb{E}(XY)$  és  $\text{COV}(X, Y)$ ?

**6. feladat** Sűrűségfüggvények-e az alábbiak? Ha igen, adjuk meg a perem- és feltételes sűrűségfüggvényeket, várható értékeket, illetve a kovarianciát!

- $f(x, y) = \frac{4}{5}(x + xy + y)$ , ha  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ , egyébként  $f(x, y) = 0$
- $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ , ha  $x, y > 0$ , egyébként  $f(x, y) = 0$