Matematika A4 - Valószínűségszámítás 12. gyakorlat
Konfidenciaintervallum, hipotézisvizsgálat

Konfidenciaintervallum

Ismeretlen paraméter lehetséges értékére egy intervallumot adunk, amiben az elvárt valószínűséggel beleesik az igazi értéke a paraméternek:

$$\mathbb{P}(l(X) \leq \theta \leq u(X)) = 1 - \alpha.$$

$[l(X), u(X)]$ a **konfidenciaintervallum**, $1 - \alpha$ a **konfidenciaszint**.

Kétoldalú Z-próba

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ahol σ ismert, μ ismeretlen. Ekkor $\mathcal{X}_n$ n elemű minta alapján μ-re az $1 - \alpha$ szinthez tartozó konfidenciaintervallum:

$$\left(\overline{\mathcal{X}_n} - \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

ahol $z_{\alpha/2}$ az az érték, aminél csak $\alpha/2$ valószínűséggel nagyobb egy standard normális eloszlású változó, azaz $\Phi\left(z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Kétoldalú T-próba

Ugyanaz a feladat, mint kétoldalú Z-próbánál, de ismeretlen σ-val. Ekkor μ-re az $1 - \alpha$ szinthez tartozó konfidenciaintervallum:

$$\left(\overline{\mathcal{X}_n} - \frac{t_{\alpha/2,n-1}\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{t_{\alpha/2,n-1}\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right),$$

ahol $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{\mathcal{X}_n}\right)^2}$ torzítatlan becslés a szórásra, míg $t_{\alpha/2,n-1}$ az az érték, aminél csak $\alpha/2$ valószínűséggel nagyobb egy $n - 1$ szabadságfokú T-eloszlású változó. Azaz $T_{n-1}\left(t_{\alpha/2,n-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, ahol T_{n-1} jelöli az $n - 1$ szabadságfokú T-eloszlás eloszlásfüggvényét. Ennek az értékei is táblázatból olvashatóak ki.

Egyoldalú Z-próba

Hasonló a feladat, mint kétoldalú Z-próbánál, de most egy $(-\infty, a)$ (vagy (a, ∞)) alakú intervallumot akarunk meghatározni, amibe $1 - \alpha$ valószínűséggel beleesik μ. Ekkor a megfelelő konfidenciaintervallum:

$$\left(-\infty \, , \, \overline{\mathcal{X}_n} + \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} \right) \qquad \left(\text{vagy } (a, \infty) \text{ esetén: } \left(\overline{\mathcal{X}_n} - \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \infty \right) \right),$$

ahol z_α az az érték, aminél csak α valószínűséggel nagyobb egy standard normális eloszlású változó, azaz $\Phi\left(z_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

1. feladat Egy normális eloszlású véletlen változóval generáltuk az alábbi mintát: (5, 6, 7, 4, 5.5, 6, 8, 7, 10).

(a) Adjunk X várható értékére 95%-os konfidenciaintervallumot!

(b) Hogyan változik az intervallum, ha megtudjuk, hogy az eloszlás szórása 2?

(c) Adjuk meg mindkét esetben a 99%-os konfidenciaintervallumot is!

(d) Mekkora az az érték, aminél 90%-os valószínűséggel kisebb a várható érték? (A szórásról továbbra is tudjuk, hogy 2.)

Megoldásvázlat

(a) Kétoldali T-próbát használunk, mert a szórás ismeretlen. Az átlag 6.5, $s^* \approx 1.77$ és $t_{0.025,8} = 2.306$. Így a keresett intervallum:

$$\left(6.5 - \frac{2.306 \cdot 1.77}{\sqrt{9}}, 6.5 - \frac{2.306 \cdot 1.77}{\sqrt{9}}\right).$$

(b) Ha a szórás ismert, akkor kétoldali Z-próbát használhatunk. $z_{0.025} = 1.96$. Vagyis az intervallum:

$$\left(6.5 - \frac{1.96 \cdot 2}{\sqrt{9}}, 6.5 - \frac{1.96 \cdot 2}{\sqrt{9}}\right).$$

(c) $t_{0.005,8} = 3.355$, míg $z_{0.005} = 2.57$, vagyis ismeretlen szórás esetén az intervallum:

$$\left(6.5 - \frac{3.355 \cdot 1.77}{\sqrt{9}}, 6.5 - \frac{3.355 \cdot 1.77}{\sqrt{9}}\right),$$

$\sigma = 2$ esetén pedig

$$\left(6.5 - \frac{2.57 \cdot 2}{\sqrt{9}}, 6.5 - \frac{2.57 \cdot 2}{\sqrt{9}}\right).$$

(d) Az egyoldali Z-próbánál látott képlettel: $\overline{\mathcal{X}_n} + \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} = 6.5 + \frac{1.28 \cdot 2}{\sqrt{9}}$

2. feladat Egy berendezés élettartamára a következő mintánk van (években):

$$\mathcal{X}_{16} = (2, 3, 4, 2.5, 3, 3, 3.5, 4, 2, 4, 3, 3, 3.5, 2, 3, 4).$$

Tudjuk, hogy a berendezés élettartamának eloszlása $N(\mu, 1)$ valamilyen ismeretlen μ-re. Adjunk 90%-os konfidenciaintervallumot a várható értékre!

Megoldásvázlat Az átlag $\frac{49.5}{16} = \frac{99}{32}$, másrészt $z_{0.05} = 1.64$, vagyis az intervallum

$$\left(\frac{99}{32} - \frac{1.64 \cdot 1}{\sqrt{16}}, \frac{99}{32} + \frac{1.64 \cdot 1}{\sqrt{16}}\right).$$

3. feladat Texasban a hőmérsékletet Fahrenheit fokokban mérik. Megállapították, hogy az ottani hőmérséklet eloszlása nyaranta $N(\mu, \sigma^2 = 16)$. A következő hőmérsékleteket mérték: (82, 80, 91, 90, 85, 87, 86, 83, 84).

(a) Adj a fenti minta alapján 90%-os szinthez konfidenciaintervallumot az átlaghőmérsékletre!

(b) Ha tudjuk, hogy a várható érték 86 F°, mi lesz az eloszlás, ha áttérünk Celsius skálára?
($\frac{5}{9}(X - 32)$[F°] = Y[C°])

(c) Ha tudjuk, hogy a hőmérséklet több, mint 90 F°, akkor mi a valószínűsége, hogy 85 és 95 F° között lesz? (A várható érték még mindig 86 F°.)

Megoldásvázlat

(a) Kétoldali Z-próbával

$$\left(85.33 - \frac{1.65 \cdot 4}{\sqrt{9}}, 85.33 + \frac{1.65 \cdot 4}{\sqrt{9}}\right).$$

(b) Tudjuk, hogy normális eloszlás lineáris transzformáltja is normális, így csak a paramétereket kell kiszámolni a transzformáció által: $Y \sim N\left(30, \sigma^2 = 4.938\right)$

(c)

$$\mathbb{P}(85 \leq X \leq 95 \,|\, X > 90) = \frac{\mathbb{P}(90 < X \leq 95)}{\mathbb{P}(X > 90)} = \frac{\Phi\left(\frac{95-86}{4}\right) - \Phi\left(\frac{90-86}{4}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{90-86}{4}\right)} \approx 0.92321$$

Hipotézisvizsgálat

Legyen $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, ahol μ ismeretlen, σ ismert és μ_0 egy adott érték. Az ismeretlen várható értékről szeretnénk eldönteni különböző feltevéseket (**nullhipotézis**) valamilyen α **szignifikancia-szint** mellett. A legkisebb α értéket, ami mellett már el tudjuk utasítani a nullhipotézist, **p-érték**nek nevezzük.

Kétoldalas A várható érték megegyezik-e az adott μ_0-val?
Nullhipotézis: $H_0 : \mu = \mu_0$.
Alternatív hipotézis: $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
Elfogadjuk H_0-t, ha μ_0 benne van a **kétoldalú Z-próbá**nál látott konfidenciaintervallumban. Ez ekvivalens azzal, hogy $Z = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{\mathcal{X}_n}-\mu_0)}{\sigma}$ esetén $|Z| \leq z_{\alpha/2}$. A p-érték az az α érték, amire $|Z| = z_{\alpha/2}$.
Ha ez nem teljesül, akkor elvetjük H_0-t.
Ismeretlen σ esetén a T-próbánál látott konfidenciaintervallumot kell használni. Vagyis, ha $T = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{\mathcal{X}_n}-\mu_0)}{\hat{\sigma}}$, akkor elfogadjuk a nullhipotézist, ha $|T| \leq t_{\alpha/2,n-1}$. A p-érték az az α érték, amire $|T| = t_{\alpha/2,n-1}$.

Egyoldalas A várható érték kisebb (nagyobb), mint az adott μ_0?
Nullhipotézis: $H_0 : \mu \leq \mu_0$ (vagy $\mu \geq \mu_0$).
Alternatív hipotézis: $H_1 : \mu > \mu_0$ (vagy $\mu < \mu_0$).
Ha $H_0 : \mu \leq \mu_0$, akkor elfogadjuk H_0-t, ha $\overline{\mathcal{X}_n} < \mu_0 + \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$. Ha $U = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{\mathcal{X}_n}-\mu_0)}{\sigma}$, akkor ez ekvivalens azzal, hogy $U \leq z_\alpha$. A p-érték az az α, amire egyenlőség van.
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ esetén elfogadáshoz az kell, hogy $\overline{\mathcal{X}_n} > \mu_0 - \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$. Vagy ezzel ekvivalensen H_0 elfogadásához az kell, hogy $U \leq z_\alpha$, ahol most $U = \frac{\sqrt{n}\cdot(\mu_0-\overline{\mathcal{X}_n})}{\sigma}$.

4. feladat Vásárlói panaszok érkeznek, hogy egy élelmiszerboltban az 1 kg-os feliratú kenyér súlya kevesebb. Szeretnénk korrekt módon kivizsgálni az ügyet. Kiszállunk az üzletbe, megmérünk n véletlenszerűen kiválasztott kenyeret, $X_1, \ldots, X_n$ a minta. Legyen $n = 25$ és a realizációban azt találjuk, hogy az átlaguk 0.98 kg. Tudjuk, hogy a kenyerek tömegének szórása $\sigma = 0.05$.

(a) Döntsük el 0.05 és 0.01 szignifikanciával, hogy csalnak-e a boltban, vagyis, hogy a kenyér tömegének várható értéke eléri-e az 1 kg-ot! Mennyi a p-érték?

(b) Mit mondhatunk, ha azt szeretnénk eldönteni, hogy pontosan 1 kg a várható érték?

(c) És, ha szintén azt szeretnénk eldönteni, hogy pontosan 1 kg várható érték, de a szórást most nem ismerjük, csak a mintából tudjuk becsülni, aminek torzítatlan szórása 0.06?

Megoldásvázlat

(a) $\mu_0 = 1$ és $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ($H_1 : \mu < \mu_0$).
$\alpha = 0.05$ esetén $\mu_0 - \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1.64\cdot 0.05}{5} = 0.984 > 0.98 = \overline{\mathcal{X}_{25}}$, így elvetjük a nullhipotézist.

$\alpha = 0.01$ esetén $\mu_0 - \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{2.33\cdot 0.05}{5} = 0.977 < 0.98 = \overline{\mathcal{X}_{25}}$, így elfogadjuk a nullhipotézist.

$U = \frac{\sqrt{n}\cdot(\mu_0-\overline{\mathcal{X}_n})}{\sigma} = \frac{5\cdot(1-0.98)}{0.05} = 2$. Mivel $z_{0.01} > U > z_{0.05}$, amiből szintén az következik, hogy 99%-os szignifikanciával elfogadjuk H_0t, de 95%-ossal elutasíthatjuk.

$\Phi(U) = \Phi(2) = 0.9772 = 1 - \alpha$, ha $\alpha = 0.0228$, tehát a p-érték 0.0228. Így ennél kisebb α esetén elfogadjuk H_0-t, ennél nagyobb α esetén elutasítjuk.

(b) Most $H_0 : \mu = \mu_0$ ($H_1 : \mu \neq \mu_0$).

A megfelelő konfidenciaintervallumok:

$\alpha = 0.05$: $\left(0.98 - \frac{1.96\cdot 0.05}{5}, 0.98 + \frac{1.96\cdot 0.05}{5}\right) = (0.9604, 0.9996)$

$\alpha = 0.01$: $\left(0.98 - \frac{2.57\cdot 0.05}{5}, 0.98 + \frac{2.57\cdot 0.05}{5}\right) = (0.9543, 1.0057)$

Jól látszik, hogy az első esetben $\mu_0 = 1$ nincs benne az intervallumban, míg második esetben benne van, így $\alpha = 0.05$ esetén elutasítjuk, $\alpha = 0.01$ esetén elfogadjuk H_0-t.

$Z = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}_n-\mu_0)}{\sigma} = \frac{5\cdot(0.98-1)}{0.05} = -2$. Ekkor $z_{0.005} > |Z| > z_{0.025}$, amiből ugyanazt a következtetést vonhatjuk le.

$|Z| = z_{\alpha/2}$, ha $\alpha = 0.0456$, így most a p-érték 0.0456. Így ennél kisebb α esetén elfogadjuk H_0-t, ennél nagyobb α esetén elutasítjuk.

(c) Továbbra is $H_0 : \mu = \mu_0$ ($H_1 : \mu \neq \mu_0$).

A megfelelő konfidenciaintervallumok:

$\alpha = 0.05$: $\left(0.98 - \frac{2.064\cdot 0.06}{5}, 0.98 + \frac{2.064\cdot 0.06}{5}\right) = (0.955, 1.005)$

$\alpha = 0.01$: $\left(0.98 - \frac{2.797\cdot 0.06}{5}, 0.98 + \frac{2.797\cdot 0.06}{5}\right) = (0.946, 1.014)$

Jól látszik, hogy a mindkét esetben $\mu_0 = 1$ benne van az intervallumban, így elfogadjuk H_0-t.

$T = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}_n-\mu_0)}{\hat{\sigma}} = \frac{5\cdot(0.98-1)}{0.06} = -1.67$. Ekkor $t_{0.005,24} > t_{0.025,24} > |T|$, amiből ugyanazt a következtetést vonhatjuk le.

$|T| = t_{\alpha/2,24}$, ha $\alpha = 0.108$, így most a p-érték 0.108. Így ennél kisebb α esetén elfogadjuk H_0-t, ennél nagyobb α esetén elutasítjuk.