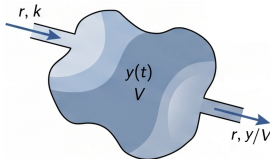
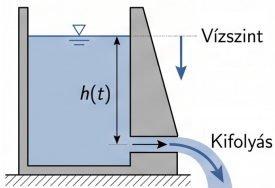


Matematika A3 építőmérnököknek 1. előadás

Bevezetés a differenciálegyenletekbe

Szőke Márton

2026. szeptember 7.



Előadások, gyakorlatok

- **Előadások** páratlan heteken hétfőn 8:15–9:45, K174
- **Gyakorlatok** hetente:
 - Barabás Zoltán: K 10–12, K375; K 12–14, K375; Cs 12–14, K389
 - Rudner László: Cs 10–12, K370
 - Szőke Márton: K 10–12, K374; K 12–14, K371



Követelmények

- Két 45 perces 42 pontos **zh**:
 - Külön-külön minimum 30%
 - Számológép, [képletgyűjtemény](#) használható
 - Pótlás: mindkettő pótolható; lehet rontani, de csak 30%-ig
- Két 8 pontos **házi**:
 - Moodle-ben lesz kiírva
- **Jegy**: a két zh és két házi összpontszáma alapján:
 - 85-től jeles (5),
 - 70-től jó (4),
 - 55-től közepes (3),
 - 40-től elégséges (2)

Egyéb információk

Elérhetőségek:

- Email: szokemp@math.bme.hu
- Teams: szoke.martonpeter@edu.bme.hu

Diasorok, feladatsorok, időpontok és egyéb információk:

- A tárgy **Teams** csoportjában
- A tárgy **honlapján**: math.bme.hu/~szokemp/matek_a3

Tematika:

- | | | |
|---|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">① Differenciálegyenletek② Valószínűségszámítás | } | Ajánlott irodalom:
a tárgyhoz készült jegyzet |
|---|---|--|

- 1 Differenciálegyenletek bevezetés
- 2 Szeparábilis differenciálegyenletek
- 3 Elsőrendű lineáris egyenletek

- 1 Differenciálegyenletek bevezetés
- 2 Szeparábilis differenciálegyenletek
- 3 Elsőrendű lineáris egyenletek

Mik azok a differenciálegyenletek?

Definíció (Differenciálegyenlet)

Egy **differenciálegyenlet** (a továbbiakban röviden: *diffegyenlet*) egy olyan egyenlet, amiben az ismeretlen egy függvény, és az egyenletben az ismeretlen függvény deriváltja is előfordul.

Miért fontosak?

„A természet törvényeit differenciálegyenletek írják le.” (Isaac Newton)



- A problémák diffegyenletben való megfogalmazása a fizikában, mérnöki tudományokban, a közgazdaságtanban és még számos tudományban alapvető szerepet tölt be

Példák differenciálegyenletekre

Keressük azt az $y = y(x)$ függvényt, amire

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \ y' = y & \text{(b)} \ xy' = \cos x - 2y & \text{(c)} \ y' = e^{x+y} \\
 \text{(d)} \ y'' = -y & \text{(e)} \ y'' + 2y' + 5y = 2e^{-x} & \text{(f)} \ (y')^2 + 2yy'' = 0
 \end{array}$$

Ellenpélda: $y = \frac{y}{x} + x$

Ez NEM differenciálegyenlet, mert nem szerepel benne y deriváltja

Megjegyzés:

- A félév során csak **közönséges** differenciálegyenletekkel foglalkozunk, azaz olyan differenciálegyenletekkel, ahol a keresett y függvény egyváltozós
- **Parciális differenciálegyenletek:** többváltozós ismeretlen függvényekre vonatkozó és ezek parciális deriváltjait tartalmazó egyenletek, ezekről az Építőmérnöki matematika MSc tárgyon lehet tanulni

Differenciálegyenlet rendje

Definíció (Első- és másodrendű differenciálegyenlet)

- Egy differenciálegyenlet **elsőrendű**, ha a keresett y függvénynek az y' deriváltja szerepel benne, viszont magasabb rendű deriváltjai nem.
- Egy differenciálegyenlet **másodrendű**, ha a keresett y függvénynek az y'' másodrendű deriváltja szerepel benne, viszont magasabb rendű deriváltjai nem.

Például: nézzük az előző dián látott differenciálegyenleteket

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \ y' = y & \text{(b)} \ xy' = \cos x - 2y & \text{(c)} \ y' = e^{x+y} \\
 \text{(d)} \ y'' = -y & \text{(e)} \ y'' + 2y' + 5y = 2e^{-x} & \text{(f)} \ (y')^2 + 2yy'' = 0
 \end{array}$$

- Elsőrendű: (a), (b), (c)
- Másodrendű: (d), (e), (f)

Megjegyzés: természetesen léteznek magasabb rendű differenciálegyenletek is, de a félév során mi csak első- és másodrendű differenciálegyenletekkel foglalkozunk

Egy differenciálegyenlet megoldása

Cél: Megtalálni az **összes** olyan $y = y(x)$ függvényt, amely kielégíti az adott összefüggést.

Példa: Tekintsük az alábbi diffegyenletet:

$$y' = y \quad (1)$$

Az $y(x) = e^x$ egy megoldása az (1) egyenletnek (hiszen ekkor $y'(x) = e^x$)
Sőt, $y(x) = c \cdot e^x$ is megoldás minden c konstansra

Megjegyzés: Nem lehet minden diffegyenlet megoldásait egy zárt képlettel leírni!

Például az $y' = \frac{e^x}{x}$ egyenletnek **nincs** képlettel megadható megoldása, hiszen az $\frac{e^x}{x}$ függvénynek nincs képlettel megadható primitív függvénye.

Kezdetiérték-probléma

Definíció (Kezdetiérték-probléma)

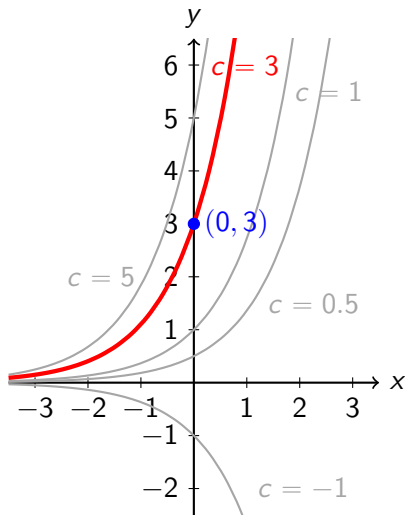
Egy differenciálegyenlethez kapcsolt **kezdeti feltétel** (például $y(x_0) = y_0$, ahol $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ adott) és maga a differenciálegyenlet együttesét **kezdetiérték-problémának** (vagy Cauchy-feladatnak) nevezzük.

Miért fontos ez?

- Egy differenciálegyenletnek általában végtelen sok megoldása van (ez az ún. **általános megoldás**, grafikusan egy görbesereg)
- A gyakorlatban (pl. egy test mozgásának leírásakor) ismernünk kell a rendszer kiinduló állapotát
- A kezdeti feltétel megadása (tehát egy (x_0, y_0) pont, amin a függvény biztosan átmegy) ebből a görbeseregből választja ki azt az egyetlen, konkrét (**partikuláris**) megoldást, amely a vizsgált problémát leírja

Kezdetiérték-probléma: példa

- Diffegyenlet: $y' = y$
- Általános megoldás:
 $y(x) = c \cdot e^x$, ahol $c \in \mathbb{R}$
- Kezdeti feltétel: $y(0) = 3$
- Az általános megoldásba behelyettesítve az $x = 0$ értéket és használva a kezdeti feltételt kapjuk, hogy $3 = c \cdot e^0$
 $\implies c = 3$
- A kezdetiérték-probléma egyetlen megoldása tehát: $y(x) = 3e^x$



Megjegyzés: a megoldás könnyen ellenőrizhető **visszahelyettesítéssel**

Egzsztencia és unicitás

Kérdés: Mikor garantált, hogy egy kezdetiérték-problémának van (és csakis egy) megoldása?

- **Egzsztencia:** létezik megoldás
- **Unicitás:** egyértelmű a megoldás

Tétel (Picard–Lindelöf-tétel)

Tekintsük az

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

alakú kezdetiérték-problémát. Ha az F és a $\frac{\partial F}{\partial y}$ függvények folytonosak egy az (x_0, y_0) pontot tartalmazó téglalapon, akkor létezik olyan $(x_0 - h, x_0 + h)$ intervallum, ahol a (2) probléma megoldása **létezik és egyértelmű**.

Megjegyzés: A Picard–Lindelöf-tétel eredeti feltételei valójában gyengébbek a fentieknél (például az ún. Lipschitz-folytonosság is elégséges)

Speciális esetek

A félév során néhány, speciális alakú differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

- ① szeparábilis
 - ② elsőrendű lineáris
 - ③ autonóm
 - ④ egzakt
 - ⑤ másodrendű lineáris
 - ⑥ hiányos másodrendű
 - ⑦ lineáris differenciálegyenlet-rendszerek
- } ma ezekkel foglalkozunk

- 1 Differenciálegyenletek bevezetés
- 2 Szeparábilis differenciálegyenletek
- 3 Elsőrendű lineáris egyenletek

Szétválasztható változójú egyenletek

Definíció (Szeparábilis differenciálegyenlet)

Egy diffegyenlet **szétválasztható** változójú vagy **szeparábilis**, ha

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (3)$$

alakú, ahol $f(x)$ és $g(y)$ adott folytonos függvények és $g(y) \neq 0$.

A megoldás lépései:

- 1 Az $y' = \frac{dy}{dx}$ helyettesítéssel és formális átszorzással (3) egyenletből:

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

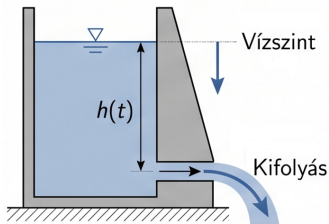
- 2 Mindkét oldalt integrálva kapjuk a megoldást:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

Mérnöki alkalmazás: Torricelli-törvény

Feladat (Torricelli-törvény)

Adott egy víztározó, amelynek az alján van egy nyílás. Hogyan változik a vízszint magassága ($h(t)$) az idő függvényében, miközben a tartály ürül?



Diffegyenlet felírása:

- A Bernoulli-egyenletből levezethető, hogy a kiáramló víz sebessége a vízmagasság négyzetgyökével arányos
- Ebből a következő diffegyenlet adódik:

$$h' = -k\sqrt{h} \quad (4)$$

ahol a k konstans a nyílás és a tartály keresztmetszetétől függ

Mérnöki alkalmazás: Torricelli-törvény

A diffegyenlet megoldása:

Az előző dián felírt $h' = -k\sqrt{h}$ diffegyenlet **szeparábilis**, így a korábban látott lépésekkel meg tudjuk oldani:

① Szétválasztjuk a változókat: $\frac{1}{\sqrt{h}} dh = -k dt$

② Mindkét oldalt integráljuk:

$$\int h^{-1/2} dh = \int -k dt \quad (5)$$

③ Elvégezzük az integrálásokat:

$$2\sqrt{h} = -kt + c \quad \text{valamilyen } c \text{ konstansra}$$

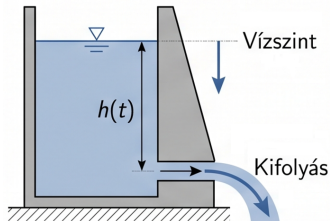
④ Vagyis a (4) diffegyenlet általános megoldása:

$$h(t) = \left(\frac{c - kt}{2} \right)^2 \quad (6)$$

Mérnöki alkalmazás: Torricelli-törvény

Feladat (Torricelli-törvény, folytatás)

Tegyük fel, hogy a tartály kezdeti vízszintje $t = 0$ időpillanatban $h(0) = 9$ méter. Mennyi idő után ürül ki a tartály?



Kezdetiérték-probléma megoldása:

- ➊ Helyettesítsük be a $h(t) = \left(\frac{c-kt}{2}\right)^2$ általános megoldásba a $t = 0$ értéket és a kezdeti feltételt: $9 = \left(\frac{c-k \cdot 0}{2}\right)^2 \implies c = 6$
- ➋ Így a vízszint változását leíró partikuláris megoldás: $h(t) = \left(3 - \frac{k}{2}t\right)^2$

Ebből könnyen számolható a kiürülés ideje: azt a t értéket keressük, amire $h(t) = 0$, vagyis a partikuláris megoldásból $t = 6/k$

Homogén fokszámú differenciálegyenletek

Definíció (Homogén fokszámú differenciálegyenlet)

A **homogén fokszámú** diffegyenlet egy olyan elsőrendű egyenlet, amelynek alakja

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (7)$$

Megoldási módszer: visszavezetjük **szeparábilis** diffegyenletre

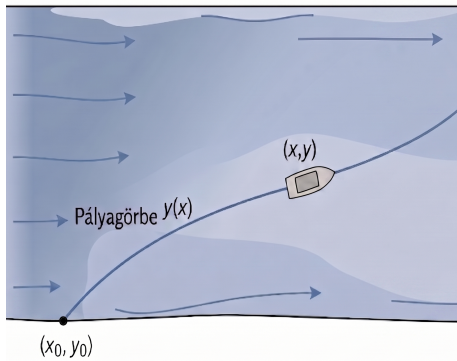
- ➊ Új változót vezetünk be: $u = \frac{y}{x}$, azaz $y = u \cdot x$
- ➋ Deriváljuk az $y = u \cdot x$ egyenlet mindkét oldalát x szerint:
 $y' = u' \cdot x + u$
- ➌ Írjuk vissza ezt az eredeti (7) egyenletbe: $u' \cdot x + u = f(u)$
- ➍ Átrendezve megkapjuk a szeparábilis diffegyenletet u -ra:

$$u' = \frac{f(u) - u}{x} \quad (8)$$

- ➎ (8) megoldása után az eredeti (7) diffegyenlet megoldása: $y = u \cdot x$

Homogén fokszámú differenciálegyenletek: alkalmazás

- Állandó keresztirányú áramlásban (pl. folyó sodrása, oldalszél) haladó járművek pályagörbéjének meghatározásakor gyakran jutunk ilyen típusú egyenletre.



Homogén fokszámú differenciálegyenletek: példa

Feladat

Oldjuk meg az $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

- ➊ A diffegyenlet $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ alakú $f(u) = \frac{1}{u} + u$ függvénnyel
- ➋ A korábban levezetett $u' = \frac{f(u)-u}{x}$ képletből $u' = \frac{1}{u \cdot x}$ **szeparábilis** diffegyenlet adódik
- ➌ A változók szétválasztása után a $\int u \, du = \int \frac{1}{x} \, dx$ egyenletet kapjuk
- ➍ Elvégezve az integrálásokat: $\frac{u^2}{2} = \ln |x| + c$
- ➎ Az $u = \frac{y}{x}$ visszahelyettesítéssel kapjuk az eredeti diffegyenlet általános megoldását:

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln |x| + c \quad \implies \quad y^2 = 2x^2(\ln |x| + c)$$

- 1 Differenciálegyenletek bevezetés
- 2 Szeparábilis differenciálegyenletek
- 3 Elsőrendű lineáris egyenletek**

Homogén és inhomogén differenciálegyenlet

Definíció (Homogén és inhomogén diffegyenlet)

- Egy diffegyenlet **homogén**, ha minden tagja tartalmazza az ismeretlen függvényt vagy annak valamelyik deriváltját.
- Ha egy diffegyenlet nem homogén, akkor **inhomogén**.
Ekkor az ismeretlen függvényt és annak deriváltjait tartalmazó tagokat nevezzük a diffegyenlet **homogén részének**, a többi tagot pedig az **inhomogén részének**.

Például: nézzük a korábban látott diffegyenleteket

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a) } y' = y & \text{(b) } xy' = \cos x - 2y & \text{(c) } y' = e^{x+y} \\
 \text{(d) } y'' = -y & \text{(e) } y'' + 2y' + 5y = 2e^{-x} & \text{(f) } (y')^2 + 2yy'' = 0
 \end{array}$$

- Homogén:** (a), (c), (d), (f)
- Inhomogén:** (b), (e)

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció (Elsőrendű lineáris diffegyenlet)

Az $y' + p(x)y = q(x)$ alakú egyenleteket **elsőrendű lineáris** diffegyenleteknek hívjuk, ahol $p(x)$ és $q(x)$ adott folytonos függvények.

Az y általános megoldás szerkezete: $y = y_h + y_p$, ahol

- y_h az $y' + p(x) \cdot y = 0$ **homogén** diffegyenlet **általános** megoldása
- y_p az $y' + p(x)y = q(x)$ **inhomogén** diffegyenlet egy **partikuláris** megoldása

A megoldás lépései

$$y = y_h + y_p \quad (9)$$

y_h meghatározása:

Az $y' + p(x)y = 0$ homogén egyenlet **szeparábilis**, így meg tudjuk határozni az y_h általános megoldást: az eredmény egy c konstans tartalmazó formula

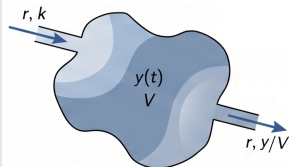
y_p meghatározása: **konstans variációs módszer**

- ❶ y_p függvényt az előző lépésben kapott formula alakjában keressük, de a c konstans egy ismeretlen $c(x)$ függvényre cseréljük
- ❷ Az így kapott alakot behelyettesítjük az $y' + p(x)y = q(x)$ inhomogén egyenletbe, ebből megkapjuk $c'(x)$ függvényt
- ❸ Innen $c(x)$ integrálással meghatározható, ebből pedig y_p is

Mérnöki alkalmazás: keverési probléma

Feladat (Keverési probléma)

Egy V térfogatú tóba r vízhozammal folyik be víz, ami k koncentrációjú szennyezőanyagot hoz. A tóból ugyanilyen r hozammal folyik ki a (tökéletesen elkeveredett) víz. Mennyi a szennyezőanyag $y(t)$ mennyisége?



A szennyeződés változási sebessége (y') a beérkező és a távozó mennyiségek különbsége:

- Beérkező: $k \cdot r$
- Távozó: tó aktuális koncentrációja (y/V) szorozva a kifolyó hozammal (r)

Ebből egy **elsőrendű lineáris** differenciálegyenletet kapunk y -ra:

$$y' = k \cdot r - \frac{r}{V}y \quad (10)$$

Mérnöki alkalmazás: keverési probléma

Megoldás:

Átrendezve a kapott (10) differenciálegyenletet:

$$y' + \frac{r}{V}y = k \cdot r, \quad (11)$$

vagyis a korábbi jelöléssel $p(t) = \frac{r}{V}$ és $q(t) = k \cdot r$ is konstans függvény

A tanultak alapján (11) általános megoldását $y = y_h + y_p$ alakban keressük

A homogén egyenlet általános megoldása:

- ❶ Az $y' + \frac{r}{V}y = 0$ homogén egyenlet szeparábilis
- ❷ A változók szétválasztása után az $\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{r}{V} dt$ egyenlet adódik
- ❸ Az integrálásokat elvégezve kapjuk a homogén egyenlet általános megoldását:

$$y_h(t) = c \cdot e^{-\frac{r}{V}t} \quad (12)$$

Mérnöki alkalmazás: keverési probléma

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

- ❶ **Konstans variáció:** az előző lépésben kapott (12) képlet alapján az inhomogén partikuláris megoldást az alábbi alakban keressük:

$$y_p(t) = c(t) \cdot e^{-\frac{r}{V}t} \quad (13)$$

- ❷ Helyettesítsük be (13) alakot az $y' + \frac{r}{V}y = k \cdot r$ diffegyenletbe:

$$c'(t) \cdot e^{-\frac{r}{V}t} - \cancel{c(t) \cdot \frac{r}{V} \cdot e^{-\frac{r}{V}t}} + \cancel{\frac{r}{V} \cdot c(t) \cdot e^{-\frac{r}{V}t}} = k \cdot r$$

- ❸ Tehát $c'(t) = k \cdot r \cdot e^{\frac{r}{V}t}$

- ❹ Ezt integrálva kapjuk meg $c(t)$ -t: $c(t) = k \cdot V \cdot e^{\frac{r}{V}t}$

- ❺ Ezt beírva (13) egyenletbe: $y_p(t) = k \cdot V$

Az eredeti diffegyenlet általános megoldása:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c \cdot e^{-\frac{r}{V}t} + k \cdot V$$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- 1 Differenciálegyenletek alapjai:
 - Alapfogalmak: rend, általános megoldás, partikuláris megoldás, kezdetiérték-probléma
 - Picard–Lindelöf-tétel
- 2 Szeparábilis diffegyenletek:
 - Megoldásuk a változók szétválasztásával
 - Homogén fokszámú diffegyenletek visszavezetése szeparábilisre
- 3 Elsőrendű lineáris diffegyenletek megoldása konstans variációs módszerrel

Köszönöm a figyelmet!