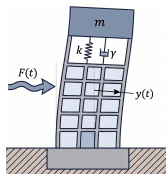
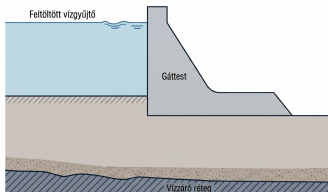
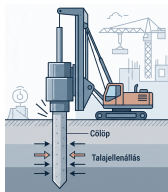


Matematika A3 építőmérnököknek 2. előadás

Autonóm, egzakt és másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Szőke Márton

2026. szeptember 21.



Emlékeztető

A félév során néhány, speciális alakú differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

- ① szeparábilis
 - ② elsőrendű lineáris
 - ③ autonóm
 - ④ egzakt
 - ⑤ másodrendű lineáris
 - ⑥ hiányos másodrendű
 - ⑦ lineáris differenciálegyenlet-rendszerek
- } ezekről már tanultunk
- } ma ezekkel foglalkozunk

- 1 Autonóm differenciálegyenletek
- 2 Egzakt differenciálegyenletek
- 3 Másodrendű lineáris egyenletek

Autonóm differenciálegyenletek

Definíció (Autonóm diffegyenlet)

Egy $y = y(x)$ függvényre vonatkozó diffegyenlet **autonóm**, ha a független változó (azaz x) nem szerepel explicit módon az egyenletben.

Példa: autonóm: $y' = y$, $y' = (2 - y) \ln y$
 nem autonóm: $y' = e^{x+y}$

Tehát egy elsőrendű autonóm diffegyenlet általános alakja

$$y' = f(y), \quad (1)$$

ahol f egy adott függvény

- Ahol $f(y) \neq 0$, ott (1) egy **szeparábilis** diffegyenlet, így meg tudjuk oldani analitikusan
- De bizonyos esetekben hasznosabb vagy egyszerűbb, ha az analitikus megoldás helyett vázlatosan **ábrázoljuk** a diffegyenlet megoldásait

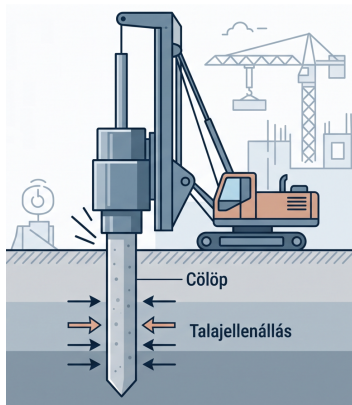
Cél: vázlatosan ábrázolni (1) megoldásait

Mérnöki alkalmazás: cölöpverő kalapács

Példa:

- Egy m tömegű cölöpverő kalapácsra a nehézségi erő, valamint a sebesség négyzetével arányos légellenállási erő hat (az arányossági tényező c)
- Az erők nem függenek attól, hogy mióta tart az esés
- Így a kalapács $v = v(t)$ esési sebességére az alábbi **autonóm** differenletet lehet felírni:

$$v' = g - \frac{c}{m}v^2 \quad (2)$$



Egyensúlyi helyzetek

Definíció (Egyensúlyi helyzetek)

Tekintsük $y' = f(y)$ autonóm diffegyenletet. Ekkor az **egyensúlyi helyzetek** (vagy **kritikus pontok**) az $f(y) = 0$ algebrai egyenlet gyökei.

Ha y_0 egy egyensúlyi helyzet, akkor az $y(x) \equiv y_0$ konstans függvény megoldja az $y' = f(y)$ diffegyenletet:

- Mivel a függvény konstans, ezért $y' \equiv 0$
- Másrészt $f(y) \equiv f(y_0)$ és $f(y_0) = 0$ (hiszen y_0 egy egyensúlyi helyzet), így $f(y) \equiv 0$

Tehát az egyensúlyi helyzetek adják az $y' = f(y)$ diffegyenlet **konstans megoldásait**

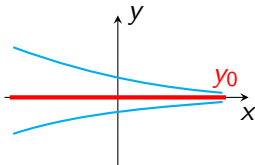
Megjegyzés: Az egzisztencia és unicitás tétele garantálja, hogy a többi megoldásgörbe nem metszi vagy érinti a konstans megoldásokat

Egyensúlyi helyzetek stabilitása

Az egyensúlyi helyzeteket osztályozhatjuk stabilitás szempontjából:

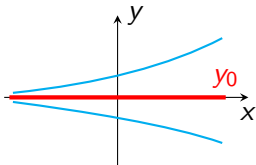
Aszimptotikusan stabil

A környező kezdőértékekkel induló **megoldások** mind y_0 -hoz tartanak



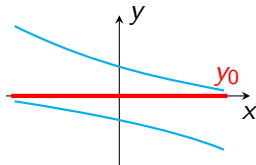
Instabil

A környező **megoldások** eltávolodnak az y_0 egyensúlyi helyzettől



Félig stabil

Az egyik irányból közelnek a **megoldások**, a másiktól távolodnak



Egyensúlyi helyzetek stabilitása: előjelvizsgálat

Az $y' = f(y)$ diffegyenlet megoldásai

- pontosan akkor növekednek (azaz $y' > 0$), ha f pozitív,
- pontosan akkor csökkennek (azaz $y' < 0$), ha f negatív

Következmény (Stabilitás előjelvizsgálattal)

Az $y' = f(y)$ diffegyenlet egyensúlyi helyzeteinek a stabilitása az $f(y)$ függvény **előjelvizsgálatával** (az egyenlet megoldása nélkül is) könnyen meghatározható.

Egy y_0 egyensúlyi helyzet

- **aszimptotikusan stabil**, ha y_0 -tól balra f pozitív, y_0 -tól jobbra negatív,
- **instabil**, ha y_0 -tól balra f negatív, y_0 -tól jobbra pozitív,
- **félig stabil** egyébként

Egyensúlyi helyzetek stabilitása: fázisvonalak

Példa: $y' = y(y-1)(y+1)^2$, azaz $f(y) = y(y-1)(y+1)^2$

- **Egyensúlyi helyzetek:** -1, 0, +1

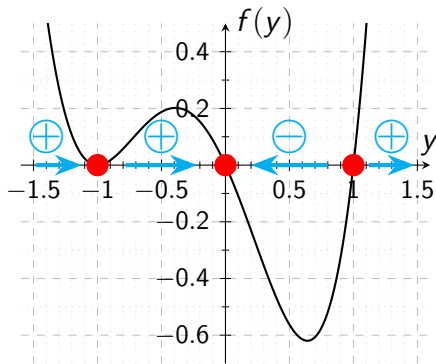
- Vizsgáljuk f előjelét

- **Fázisvonalak:** nyilakat rajzolunk f előjele szerint:

- jobbra, ahol $f > 0$
- balra, ahol $f < 0$

- **Stabilitás:**

- $y_0 = +1$: 
⇒ instabil
- $y_0 = 0$: 
⇒ aszimp. stabil
- $y_0 = -1$: 
⇒ félig stabil



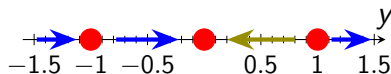
Megoldásgörbék ábrázolása

Az előjelvizsgálat után a megoldásgörbéket is tudjuk vázolni:

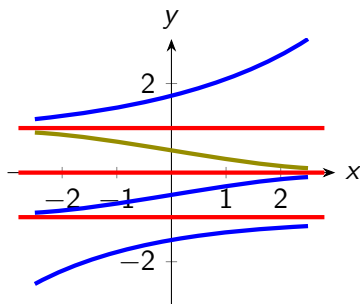
- **konstans** megoldásgörbék egyensúlyi helyzetekben ($f(y) = 0$)
- **növő** megoldásgörbék, ahol f pozitív
- **csökkenő** megoldásgörbék, ahol f negatív

Például: $y' = y(y - 1)(y + 1)^2$

Fázisvonalak:



Megoldásgörbék:



- 1 Autonóm differenciálegyenletek
- 2 **Egzakt differenciálegyenletek**
- 3 Másodrendű lineáris egyenletek

Egzaktt differenciálegyenlet

Definíció (Egzaktt diffegyenlet)

Tekintsük az

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (3)$$

alakú diffegyenletet, ahol $M(x, y)$ és $N(x, y)$ adott kétváltozós függvények. A (3) diffegyenlet **egzaktt**, ha teljesül a

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4)$$

feltétel, és mind $M(x, y)$, mind $N(x, y)$ parciális deriváltjai folytonosak egy egyszeresen összefüggő tartományon (nincsenek benne „lyukak”).

Megjegyzés: A (3) egyenlet átrendezve és $y' = \frac{dy}{dx}$ átírással az $M(x, y) + N(x, y) \cdot y' = 0$ diffegyenlettel ekvivalens

A megoldás szerkezete

Tétel (Potenciálfüggvény létezése)

Ha a diffegyenlet egzakt, akkor létezik olyan $F(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre:

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{és} \quad N = \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (5)$$

Ilyenkor F -et **potenciálfüggvénynek** hívjuk.

Megjegyzés: A potenciálfüggvény csak egy additív konstans erejéig meghatározott, azaz ha F teljesíti (5) feltételt, akkor $F + c$ is teljesíti tetszőleges c konstansra

Az általános megoldás: A (3) egzakt diffegyenlet általános megoldását implicit alakban kapjuk meg:

$$F(x, y) = C,$$

ahol F potenciálfüggvény, $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans

Potenciálfüggvény meghatározása

Tegyük fel, hogy adott egy $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ alakú egzakt differenciálegyenlet (azaz teljesül (4))

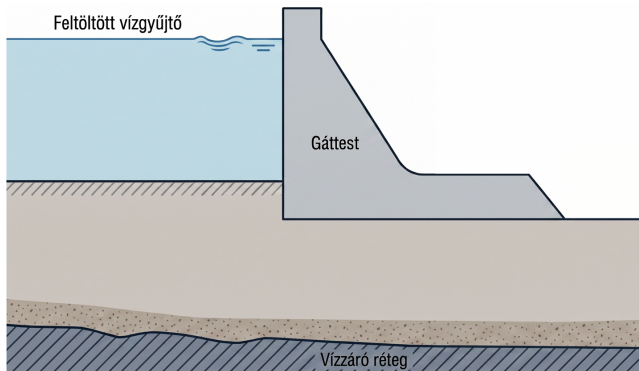
Kérdés: Hogyan tudjuk meghatározni F -et?

- ❶ Tudjuk, hogy $M = \frac{\partial F}{\partial x}$, így az $M(x, y)$ függvényt integráljuk x szerint
- ❷ Az így kapott függvényben van egy ismeretlen, csak y -től függő $c(y)$ rész
- ❸ Az ismeretlen $c(y)$ részt meghatározzuk a $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ azonosságból

Megjegyzés: Hasonlóan működik, ha $N(x, y)$ -t integráljuk y szerint, majd a csak x -től függő részt a $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ egyenletből számoljuk ki

Mérnöki alkalmazás: talajvíz szivárgás

- Gátak alatti szivárgásnál a talajvíz nyomását és áramlását egy fizikai potenciálfüggvény írja le
- Azokat a görbéket, ahol ez a nyomás állandó (ekvipotenciális vonalak), egy egzakt differenciálegyenlettel lehet leírni



Egzaktt differenciálegyenlet: példa

Feladat

Oldjuk meg az $(x + 2y) \cdot y' + (2x + y) = 0$ egyenletet!

Átírás és ellenőrzés:

- Az $y' = \frac{dy}{dx}$ jelöléssel és átszorzással:

$$(2x + y) dx + (x + 2y) dy = 0 \quad (6)$$

- Tehát a diffegyenletet átírtuk $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ alakúra, ahol $M(x, y) = 2x + y$ és $N(x, y) = x + 2y$
- Vizsgáljuk meg az **egzaktságot**:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \quad (7)$$

tehát teljesül a $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ feltétel, vagyis az egyenlet egzakt, így létezik $F(x, y)$ potenciálfüggvény

Egzaktt differenciálegyenlet: példa

Potenciálfüggvény meghatározása:

- ❶ Mivel $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$, integráljuk M -et x szerint:

$$F(x, y) = \int (2x + y) dx = x^2 + xy + c(y), \quad (8)$$

ahol $c(y)$ az integrálási „konstans”, ami y -tól függhet

- ❷ Tudjuk, hogy $N = \frac{\partial F}{\partial y}$, ezért a kapott formulát deriváljuk y szerint:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \stackrel{(8)}{=} \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + c(y)) = x + c'(y) \quad (9)$$

- ❸ A jobb oldalnak $N(x, y) = x + 2y$ függvénnyel kell megegyeznie, tehát $x + c'(y) = x + 2y$, amiből $c'(y) = 2y$, így integrálva $c(y) = y^2 + c$ és az $F(x, y)$ függvény: $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 + c$

Megoldás: Tehát az $(x + 2y) \cdot y' + (2x + y) = 0$ diffegyenlet **általános megoldása** (implicit módon megadva): $x^2 + xy + y^2 = C$

- 1 Autonóm differenciálegyenletek
- 2 Egzakt differenciálegyenletek
- 3 Másodrendű lineáris egyenletek

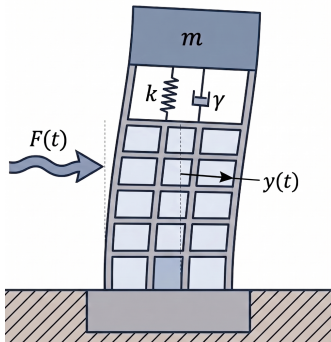
Mérnöki alkalmazás: épületek és hidak dinamikai lengései

A rugalmas szerkezetek (hidak, csarnokok, felhőkarcolók) rezgései modellezhetők **tömeg-rugó-csillapító** rendszerként

Példa:

- Egy m tömegű felhőkarcolóra $F(t)$ külső gerjesztőerő (pl. szél) hat
- Legyen az épület szerkezeti merevsége k , csillapítási tényezője γ
- Ekkor az $y(t)$ vízszintes irányú elmozdulást egy **másodrendű lineáris** differenciálegyenlet írja le:

$$my'' + \gamma y' + ky = F(t)$$



Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció (Másodrendű lineáris diffegyenlet)

Másodrendű lineáris egyenlet általános alakja:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (10)$$

ahol $p(t)$, $q(t)$ és $g(t)$ adott függvények.

Emlékeztető: Ha $g(t) \equiv 0$, az egyenlet **homogén**, különben **inhomogén**

Az y általános megoldás szerkezete: $y = y_h + y_p$, ahol

- y_h az $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ **homogén** differenciálegyenlet **általános** megoldása
- y_p a (10) **inhomogén** differenciálegyenlet egy **partikuláris** megoldása

Kérdés: Hogyan határozható meg y_h és y_p ?

Fundamentális megoldások

Tekintsük a **homogén** egyenletet:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (11)$$

Definíció (Fundamentális megoldások)

Az $y_1(t)$, $y_2(t)$ függvények a (11) **fundamentális megoldásai**, ha:

- $y_1(t)$ és $y_2(t)$ megoldásai az (11) egyenletnek, és
- $y_2(t)$ nem konstansszorosa az $y_1(t)$ függvénynek.

Megjegyzés:

- A fundamentális megoldások nem egyértelműek
- Nincs általános módszer meghatározásukra
- Mi az **állandó együtthatós** esetre tanulunk módszert, azaz amikor $p(t)$ és $q(t)$ konstansok

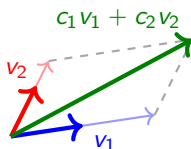
Fundamentális megoldások

Tétel (Általános megoldás)

Ha $\{y_1, y_2\}$ fundamentális megoldásai a homogén (11) egyenletnek, akkor (11) összes megoldása felírható az alábbi alakban, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2. \quad (12)$$

Analógia: Ha v_1 és v_2 egy sík két nem párhuzamos vektora, akkor a sík összes vektora előáll $c_1 v_1 + c_2 v_2$ alakban



Példa: Tekintsük az alábbi egyenletet:

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0 \quad (13)$$

- Ennek megoldása $y_1(t) = t$ és $y_2(t) = t^2$
- Ezek nem egymás konstansszorosai, így (13) egy fundamentális megoldását alkotják, tehát (13) általános megoldása: $c_1 t + c_2 t^2$

Állandó együtthatós homogén egyenletek

Tekintsünk egy **állandó együtthatós** másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletet:

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (14)$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$

Cél: Meghatározni (14) egyenlet y_h **általános megoldását**

Ötlet: Keressük a fundamentális megoldásokat $y(t) = e^{rt}$ alakban!

- Behelyettesítve az $y(t) = e^{rt}$ függvényt (14) egyenletbe:

$$ar^2 \cdot e^{rt} + br \cdot e^{rt} + c \cdot e^{rt} = 0$$

- Egyszerűsítés után adódik a **karakterisztikus egyenlet**:

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (15)$$

- Legyenek a (15) egyenlet gyökei r_1 és r_2

Állandó együtthatós homogén egyenletek: esetek

A gyökök alapján 3 különböző esetet különböztetünk meg y_h megadásakor:

I. eset: Két **különböző valós** gyök ($r_1 \neq r_2$):

- Ekkor $e^{r_1 t}$ és $e^{r_2 t}$ fundamentális megoldásai (14) egyenletnek
- Így $y_h = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

II. eset: Egy valós **kétszeres** gyök ($r_1 = r_2$):

- Ekkor belátható, hogy $e^{r_1 t}$ mellett $te^{r_1 t}$ is megoldása (14)-nek
- Így $y_h = c_1 e^{r_1 t} + c_2 te^{r_1 t}$

III. eset: **Komplex** konjugált gyökpár ($r_1 = u + iv$, $r_2 = u - iv$):

- Az $e^{r_1 t}$ és $e^{r_2 t}$ megoldások, de komplex függvények
- **Euler-formula:** $e^{it} = \cos t + i \sin t$
- Ennek segítségével tisztán valós fundamentális megoldásokat tudunk képezni: $y_1(t) = e^{ut} \cos(vt)$, $y_2(t) = e^{ut} \sin(vt)$
- Így az általános megoldás: $y_h = c_1 e^{ut} \cos(vt) + c_2 e^{ut} \sin(vt)$

Homogén másodrendű egyenletek: példák

Feladat

Adjuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását!

a) $y'' + y' - 30y = 0$

b) $y'' - 6y' + 9y = 0$

c) $y'' - 4y' + 13y = 0$

Karakterisztikus egyenlet	Gyökök	Általános megoldás (y_h)
a) $r^2 + r - 30 = 0$	$r_1 = -6, r_2 = 5$	$c_1 e^{-6t} + c_2 e^{5t}$
b) $r^2 - 6r + 9 = 0$	$r_1 = r_2 = 3$	$c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$
c) $r^2 - 4r + 13 = 0$	$r_{1,2} = 2 \pm 3i$	$c_1 e^{2t} \cos(3t) + c_2 e^{2t} \sin(3t)$

Inhomogén egyenletek megoldási módszerei

Tekintsünk egy állandó együtthatós **inhomogén** másodrendű lineáris egyenletet:

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (16)$$

Cél: a (16) egyenlet egy y_p **partikuláris** megoldásának megtalálása

Két módszert tanulunk:

1. Próbafüggvény módszer:

- Csak akkor alkalmazható, ha $g(t)$ **speciális alakú**
- Ekkor a partikuláris megoldást hasonló alakú függvénnyel kereshetjük

2. Konstans variációs módszer:

- **Bármilyen** folytonos $g(t)$ esetén működik
- Nem csak konstans, de függvény együtthatós esetben $(y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t))$ is használható
- Jellemzően **több számolást** igényel

Próbafüggvény módszer: lehetséges $g(t)$

Akkor lehet alkalmazni, ha (16) egyenletben $g(t)$ **speciális** alakú:
polinom, **exponenciális**, **szinusz/koszinusz** vagy ezek szorzata

Általánosan:

$$g(t) = e^{ut} \cdot (A_n(t) \cdot \cos(vt) + B_m(t) \cdot \sin(vt)), \quad \text{ahol} \quad (17)$$

- $u \in \mathbb{R}$ az **exponenciális** tagból olvasható le,
- $v \in \mathbb{R}$ a **szinuszos**, **koszinuszos** tagból olvasható le,
- A_n egy n -edfokú **polinom** valamilyen $a_0, \dots, a_n$ együtthatókkal:

$$A_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

- B_m egy m -edfokú **polinom** valamilyen $b_0, \dots, b_m$ együtthatókkal:

$$B_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0$$

Megjegyzés:

- Nem kell szinuszos és koszinuszos tagnak is lennie: ha valamelyik hiányzik, akkor a megfelelő polinom az azonosan 0 polinom
- Ha van mindkettő, akkor v együtthatónak meg kell egyeznie

Próbafüggvény módszer: próbafüggvény alakja

- Tegyük fel, hogy (16) jobb oldalán lévő függvény alakja:

$$g(t) = e^{ut}(A_n(t) \cos(vt) + B_m(t) \sin(vt)) \quad (18)$$

- Legyen $s \in \{0, 1, 2\}$ az $u + iv$ komplex szám multiplicitása a (16) homogén részéhez tartozó karakterisztikus egyenletben (azaz $u + iv$ hányiszoros gyöke az egyenletnek)
- Ekkor a **partikuláris** megoldást az alábbi alakban keressük

$$y_p = t^s \cdot e^{ut} \cdot (P_k(t) \cdot \cos(vt) + Q_k(t) \cdot \sin(vt)), \quad \text{ahol} \quad (19)$$

- $k = \max(n, m)$,
- P_k, Q_k ismeretlen együtthatós k -adfokú polinomok, azaz

$$P_k(t) = p_k t^k + \dots + p_1 t + p_0, \quad Q_k(t) = q_k t^k + \dots + q_1 t + q_0$$

- Az ismeretlen $p_0, \dots, p_k, q_0, \dots, q_k$ együtthatókat a (16) egyenletbe való **visszahelyettesítésből** kaphatjuk meg

Megjegyzés: Ha $s \geq 1$, azt **rezonanciának** hívjuk, ekkor az y_p -ben megjelenő t^s szorzó mutatja, hogy az amplitúdó a végtelenbe tarthat

Inhomogén másodrendű egyenlet: példa

Feladat

Adjuk meg az $y'' + y' - 30y = e^{5t}$ diffegyenlet általános megoldását!

Homogén rész: $y'' + y' - 30y = 0$

A 25. dián láttuk:

- A karakterisztikus egyenlet gyökei $r_1 = -6$, $r_2 = 5$,
- A homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = c_1 e^{-6t} + c_2 e^{5t}$

Inhomogén rész: $g(t) = e^{5t}$

- 1 Használhatjuk a **próbafüggvény-módszert**, hiszen a (17) egyenlet jelöléseivel:
 - $u = 5$, $v = 0$
 - $A_n(t) \equiv 1$, $B_m(t) \equiv 0$, vagyis $n = m = 0$

Inhomogén másodrendű egyenlet: példa

- 2 A próbafüggvényt $y_p = t^s \cdot e^{ut} \cdot (P_k(t) \cdot \cos(vt) + Q_k(t) \cdot \sin(vt))$ alakban keressük, ahol
- $u = 5$, $v = 0$ (spec. $\cos(vt) \equiv 1$ és $\sin(vt) \equiv 0$)
 - $s = 1$, hiszen $u + iv = 5$ egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek
 - $k = \max(n, m) = 0$, vagyis $P_k(t) = p_0$, $Q_k(t) = q_0$
- 3 Így a partikuláris megoldást $y_p = t \cdot e^{5t} \cdot p_0$ alakban keressük
- 4 Ekkor $y_p' = p_0 \cdot e^{5t} + 5p_0 \cdot t \cdot e^{5t}$ és $y_p'' = 10p_0 \cdot e^{5t} + 25p_0 \cdot t \cdot e^{5t}$
- 5 Ezeket behelyettesítve az $y'' + y' - 30y = e^{5t}$ egyenletbe:
- $$10p_0 \cdot e^{5t} + \cancel{25p_0 \cdot t \cdot e^{5t}} + p_0 \cdot e^{5t} + \cancel{5p_0 \cdot t \cdot e^{5t}} - \cancel{30p_0 \cdot t \cdot e^{5t}} = e^{5t},$$
- azaz $11p_0 \cdot e^{5t} = e^{5t}$, vagyis $p_0 = \frac{1}{11}$
- 6 Tehát a keresett partikuláris megoldás: $y_p = \frac{1}{11} \cdot t \cdot e^{5t}$

Így az $y'' + y' - 30y = e^{5t}$ egyenlet általános megoldása:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-6t} + c_2 e^{5t} + \frac{1}{11} \cdot t \cdot e^{5t} \quad (20)$$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- ① Autonóm diffegyenletek: $y' = f(y)$
 - Egyensúlyi helyzetek osztályozása f előjele alapján
 - Megoldásgörbék ábrázolása
- ② Egzakt diffegyenletek: $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$
 - Megoldás felírása potenciálfüggvénnyel: $F(x, y) = C$
- ③ Állandó együtthatós másodrendű lineáris diffegyenletek:
 $ay'' + by' + cy = g(t) \Rightarrow y = y_h + y_p$
 - y_h : az $ar^2 + br + c = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei alapján 3 eset
 - y_p próbafüggvény-módszerrel:
 $y_p = t^s \cdot e^{ut} \cdot (P_k(t) \cdot \cos(vt) + Q_k(t) \cdot \sin(vt))$

Köszönöm a figyelmet!