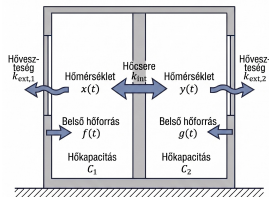
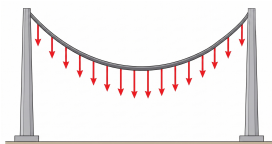


Matematika A3 építőmérnököknek 3. előadás

Másodrendű egyenletek, lineáris rendszerek

Szőke Márton

2026. október 5.



Emlékeztető

A félév során néhány, speciális alakú differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

- 1 szeparábilis
- 2 elsőrendű lineáris
- 3 autonóm
- 4 egzakt
- 5 másodrendű lineáris
- 6 hiányos
- 7 lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Emlékeztető

A félév során néhány, speciális alakú differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

- ① szeparábilis
 - ② elsőrendű lineáris
 - ③ autonóm
 - ④ egzakt
 - ⑤ másodrendű lineáris
 - ⑥ hiányos
 - ⑦ lineáris differenciálegyenlet-rendszerek
- } ezekről már tanultunk

Emlékeztető

A félév során néhány, speciális alakú differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

- 1 szeparábilis
 - 2 elsőrendű lineáris
 - 3 autonóm
 - 4 egzakt
 - 5 másodrendű lineáris
 - 6 hiányos
 - 7 lineáris differenciálegyenlet-rendszerek
- ezekről már tanultunk
- ma ezekkel foglalkozunk

- 1 Konstans variációs módszer
- 2 Hiányos másodrendű egyenletek
- 3 Differenciálegyenlet-rendszerek

- 1 Konstans variációs módszer
- 2 Hiányos másodrendű egyenletek
- 3 Differenciálegyenlet-rendszerek

Konstans variációs módszer

Tekintsünk egy másodrendű lineáris egyenletet:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

Konstans variációs módszer

Tekintsünk egy másodrendű lineáris egyenletet:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

Cél: az (1) egyenlet egy **partikuláris** megoldásának előállítása

Konstans variációs módszer

Tekintsünk egy másodrendű lineáris egyenletet:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

Cél: az (1) egyenlet egy **partikuláris** megoldásának előállítása

⇒ **konstans variációs módszer**

Konstans variációs módszer

Tekintsünk egy másodrendű lineáris egyenletet:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

Cél: az (1) egyenlet egy **partikuláris** megoldásának előállítása
 $\Rightarrow$ **konstans variációs módszer**

Megjegyzés:

- A cél ugyanaz, mint próbafüggvény-módszernél

Konstans variációs módszer

Tekintsünk egy másodrendű lineáris egyenletet:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

Cél: az (1) egyenlet egy **partikuláris** megoldásának előállítása

⇒ **konstans variációs módszer**

Megjegyzés:

- A cél ugyanaz, mint próbafüggvény-módszernél
- De ez általánosabb, hiszen változó együtthatós esetben is működik és nem kell $g(t)$ -nek speciális alakúnak lennie

Konstans variációs módszer

Tekintsünk egy másodrendű lineáris egyenletet:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

Cél: az (1) egyenlet egy **partikuláris** megoldásának előállítása

⇒ **konstans variációs módszer**

Megjegyzés:

- A cél ugyanaz, mint próbafüggvény-módszernél
- De ez általánosabb, hiszen változó együtthatós esetben is működik és nem kell $g(t)$ -nek speciális alakúnak lennie
- Ha lehet használni próbafüggvény-módszert, az általában könnyebben számolható

Konstans variációs módszer

A módszer lépései:

Konstans variációs módszer

A módszer lépései:

1. Állítsuk elő (1) homogén részének általános megoldását
 $y_h = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban

Konstans variációs módszer

A módszer lépései:

- 1 Állítsuk elő (1) homogén részének általános megoldását $y_h = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban
- 2 Helyettesítsük a c_1, c_2 konstansokat ismeretlen $c_1(t), c_2(t)$ függvényekkel

Konstans variációs módszer

A módszer lépései:

- 1 Állítsuk elő (1) homogén részének általános megoldását $y_h = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban
- 2 Helyettesítsük a c_1, c_2 konstansokat ismeretlen $c_1(t), c_2(t)$ függvényekkel, azaz a partikuláris megoldást az alábbi alakban keressük:

$$y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) \quad (2)$$

Konstans variációs módszer

A módszer lépései:

- ① Állítsuk elő (1) homogén részének általános megoldását $y_h = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban
- ② Helyettesítsük a c_1, c_2 konstansokat ismeretlen $c_1(t), c_2(t)$ függvényekkel, azaz a partikuláris megoldást az alábbi alakban keressük:

$$y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) \quad (2)$$

- ③ Határozzuk meg az ismeretlen függvények deriváltjait ($c_1'(t), c_2'(t)$) az alábbi egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{aligned} c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) &= 0 \\ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) &= g(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Konstans variációs módszer

A módszer lépései:

- 1 Állítsuk elő (1) homogén részének általános megoldását $y_h = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban
- 2 Helyettesítsük a c_1, c_2 konstansokat ismeretlen $c_1(t), c_2(t)$ függvényekkel, azaz a partikuláris megoldást az alábbi alakban keressük:

$$y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) \quad (2)$$

- 3 Határozzuk meg az ismeretlen függvények deriváltjait ($c_1'(t), c_2'(t)$) az alábbi egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{aligned} c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) &= 0 \\ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) &= g(t) \end{aligned} \quad (3)$$

- 4 $c_1'(t), c_2'(t)$ integrálásával megkapjuk $c_1(t), c_2(t)$ függvényeket

Konstans variációs módszer

A módszer lépései:

1. Állítsuk elő (1) homogén részének általános megoldását $y_h = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban
2. Helyettesítsük a c_1, c_2 konstansokat ismeretlen $c_1(t), c_2(t)$ függvényekkel, azaz a partikuláris megoldást az alábbi alakban keressük:

$$y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) \quad (2)$$

3. Határozzuk meg az ismeretlen függvények deriváltjait ($c_1'(t), c_2'(t)$) az alábbi egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{aligned} c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) &= 0 \\ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) &= g(t) \end{aligned} \quad (3)$$

4. $c_1'(t), c_2'(t)$ integrálásával megkapjuk $c_1(t), c_2(t)$ függvényeket és ezeket visszahelyettesítve y_p partikuláris megoldást is

Konstans variációs módszer: példa

Feladat

Határozzuk meg az alábbi egyenlet általános megoldását ($t > 0$):

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 2t, \quad (4)$$

Konstans variációs módszer: példa

Feladat

Határozzuk meg az alábbi egyenlet általános megoldását ($t > 0$):

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 2t, \quad (4)$$

ahol tudjuk, hogy a homogén egyenletet megoldja $y_1(t) = t$ és $y_2(t) = t^2$.

Konstans variációs módszer: példa

Feladat

Határozzuk meg az alábbi egyenlet általános megoldását ($t > 0$):

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 2t, \quad (4)$$

ahol tudjuk, hogy a homogén egyenletet megoldja $y_1(t) = t$ és $y_2(t) = t^2$.

Megoldás:

- 1 A megadott y_1 és y_2 nem egymás konstansszorosai, így fundamentális megoldások

Konstans variációs módszer: példa

Feladat

Határozzuk meg az alábbi egyenlet általános megoldását ($t > 0$):

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 2t, \quad (4)$$

ahol tudjuk, hogy a homogén egyenletet megoldja $y_1(t) = t$ és $y_2(t) = t^2$.

Megoldás:

- ① A megadott y_1 és y_2 nem egymás konstansszorosai, így fundamentális megoldások, tehát (4) **homogén** részének általános megoldása:

$$y_h = c_1 t + c_2 t^2 \quad (5)$$

Konstans variációs módszer: példa

Feladat

Határozzuk meg az alábbi egyenlet általános megoldását ($t > 0$):

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 2t, \quad (4)$$

ahol tudjuk, hogy a homogén egyenletet megoldja $y_1(t) = t$ és $y_2(t) = t^2$.

Megoldás:

- ① A megadott y_1 és y_2 nem egymás konstansszorosai, így fundamentális megoldások, tehát (4) **homogén** részének általános megoldása:

$$y_h = c_1 t + c_2 t^2 \quad (5)$$

- ② A partikuláris megoldást az alábbi alakban keressük:

$$y_p = c_1(t)t + c_2(t)t^2 \quad (6)$$

Konstans variációs módszer: példa

- 3 Írjuk fel (3) egyenletrendszert $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

Konstans variációs módszer: példa

- 3 Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- 4 Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

Konstans variációs módszer: példa

- 3 Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- 4 Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

- 5 Ezt (8)-ba beírva: $-c_2'(t)t + c_2'(t) \cdot 2t = 2t$

Konstans variációs módszer: példa

- 3 Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- 4 Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

- 5 Ezt (8)-ba beírva: $-c_2'(t)t + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \implies c_2'(t) = 2$

Konstans variációs módszer: példa

- 3 Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- 4 Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

- 5 Ezt (8)-ba beírva: $-c_2'(t)t + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \implies c_2'(t) = 2$

- 6 Ezt visszahelyettesítve $c_1'(t)$ -re kapott képletbe: $c_1'(t) = -2t$.

Konstans variációs módszer: példa

- ③ Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- ④ Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

- ⑤ Ezt (8)-ba beírva: $-c_2'(t)t + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \implies c_2'(t) = 2$

- ⑥ Ezt visszahelyettesítve $c_1'(t)$ -re kapott képletbe: $c_1'(t) = -2t$.

- ⑦ Innen integrálás után kapjuk $c_1(t)$ és $c_2(t)$ függvényeket

Konstans variációs módszer: példa

- 3 Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- 4 Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

- 5 Ezt (8)-ba beírva: $-c_2'(t)t + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \implies c_2'(t) = 2$

- 6 Ezt visszahelyettesítve $c_1'(t)$ -re kapott képletbe: $c_1'(t) = -2t$.

- 7 Innen integrálás után kapjuk $c_1(t)$ és $c_2(t)$ függvényeket:

$$c_1(t) \stackrel{6}{=} \int -2t \, dt$$

Konstans variációs módszer: példa

- ③ Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- ④ Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

- ⑤ Ezt (8)-ba beírva: $-c_2'(t)t + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \implies c_2'(t) = 2$

- ⑥ Ezt visszahelyettesítve $c_1'(t)$ -re kapott képletbe: $c_1'(t) = -2t$.

- ⑦ Innen integrálás után kapjuk $c_1(t)$ és $c_2(t)$ függvényeket:

$$c_1(t) \stackrel{⑥}{=} \int -2t \, dt = -t^2$$

Konstans variációs módszer: példa

- 3 Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- 4 Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

- 5 Ezt (8)-ba beírva: $-c_2'(t)t + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \implies c_2'(t) = 2$

- 6 Ezt visszahelyettesítve $c_1'(t)$ -re kapott képletbe: $c_1'(t) = -2t$.

- 7 Innen integrálás után kapjuk $c_1(t)$ és $c_2(t)$ függvényeket:

$$c_1(t) \stackrel{6}{=} \int -2t \, dt = -t^2, \quad c_2(t) \stackrel{5}{=} \int 2 \, dt$$

Konstans variációs módszer: példa

- 3 Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- 4 Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

- 5 Ezt (8)-ba beírva: $-c_2'(t)t + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \implies c_2'(t) = 2$

- 6 Ezt visszahelyettesítve $c_1'(t)$ -re kapott képletbe: $c_1'(t) = -2t$.

- 7 Innen integrálás után kapjuk $c_1(t)$ és $c_2(t)$ függvényeket:

$$c_1(t) \stackrel{6}{=} \int -2t \, dt = -t^2, \quad c_2(t) \stackrel{5}{=} \int 2 \, dt = 2t$$

Konstans variációs módszer: példa

- 3 Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- 4 Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

- 5 Ezt (8)-ba beírva: $-c_2'(t)t + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \implies c_2'(t) = 2$

- 6 Ezt visszahelyettesítve $c_1'(t)$ -re kapott képletbe: $c_1'(t) = -2t$.

- 7 Innen integrálás után kapjuk $c_1(t)$ és $c_2(t)$ függvényeket:

$$c_1(t) \stackrel{6}{=} \int -2t \, dt = -t^2, \quad c_2(t) \stackrel{5}{=} \int 2 \, dt = 2t$$

Vagyis a partikuláris megoldás: $y_p = (-t^2) \cdot t + (2t) \cdot t^2$

Konstans variációs módszer: példa

- 3 Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- 4 Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

- 5 Ezt (8)-ba beírva: $-c_2'(t)t + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \implies c_2'(t) = 2$

- 6 Ezt visszahelyettesítve $c_1'(t)$ -re kapott képletbe: $c_1'(t) = -2t$.

- 7 Innen integrálás után kapjuk $c_1(t)$ és $c_2(t)$ függvényeket:

$$c_1(t) \stackrel{6}{=} \int -2t \, dt = -t^2, \quad c_2(t) \stackrel{5}{=} \int 2 \, dt = 2t$$

Vagyis a partikuláris megoldás: $y_p = (-t^2) \cdot t + (2t) \cdot t^2 = t^3$

Konstans variációs módszer: példa

- ③ Írjuk fel (3) egyenletrendszer $c_1'(t)$ és $c_2'(t)$ meghatározására:

$$c_1'(t) \cdot t + c_2'(t) \cdot t^2 = 0 \quad (7)$$

$$c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \quad (8)$$

- ④ Ekkor $c_1'(t)$ kifejezhető (7)-ből: $c_1'(t) = -c_2'(t)t$

- ⑤ Ezt (8)-ba beírva: $-c_2'(t)t + c_2'(t) \cdot 2t = 2t \implies c_2'(t) = 2$

- ⑥ Ezt visszahelyettesítve $c_1'(t)$ -re kapott képletbe: $c_1'(t) = -2t$.

- ⑦ Innen integrálás után kapjuk $c_1(t)$ és $c_2(t)$ függvényeket:

$$c_1(t) \stackrel{⑥}{=} \int -2t \, dt = -t^2, \quad c_2(t) \stackrel{⑤}{=} \int 2 \, dt = 2t$$

Vagyis a partikuláris megoldás: $y_p = (-t^2) \cdot t + (2t) \cdot t^2 = t^3$

Így (4) általános megoldása: $y = y_h + y_p = c_1 t + c_2 t^2 + t^3$

- 1 Konstans variációs módszer
- 2 Hiányos másodrendű egyenletek
- 3 Differenciálegyenlet-rendszerek

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Egy másodrendű diffegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (9)$$

valamilyen F függvénnyel

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Egy másodrendű diffegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (9)$$

valamilyen F függvénnyel, ami biztosan függ y'' -től (különben (9) nem lenne másodrendű)

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Egy másodrendű diffegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (9)$$

valamilyen F függvénnyel, ami biztosan függ y'' -től (különben (9) nem lenne másodrendű), de x , y és y' nem feltétlenül szerepel az egyenletben

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Egy másodrendű diffegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (9)$$

valamilyen F függvénnyel, ami biztosan függ y'' -től (különben (9) nem lenne másodrendű), de x , y és y' nem feltétlenül szerepel az egyenletben

Definíció (Hiányos egyenlet)

Egy másodrendű diffegyenlet **hiányos**, ha az x, y, y' változók közül legalább az egyik hiányzik.

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Egy másodrendű diffegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (9)$$

valamilyen F függvénnyel, ami biztosan függ y'' -től (különben (9) nem lenne másodrendű), de x , y és y' nem feltétlenül szerepel az egyenletben

Definíció (Hiányos egyenlet)

Egy másodrendű diffegyenlet **hiányos**, ha az x, y, y' változók közül legalább az egyik hiányzik.

Nem tudunk tetszőleges (9) alakú diffegyenletet megoldani

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Egy másodrendű diffegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (9)$$

valamilyen F függvénnyel, ami biztosan függ y'' -től (különben (9) nem lenne másodrendű), de x , y és y' nem feltétlenül szerepel az egyenletben

Definíció (Hiányos egyenlet)

Egy másodrendű diffegyenlet **hiányos**, ha az x, y, y' változók közül legalább az egyik hiányzik.

Nem tudunk tetszőleges (9) alakú diffegyenletet megoldani, de igen, ha:

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Egy másodrendű diffegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (9)$$

valamilyen F függvénnyel, ami biztosan függ y'' -től (különben (9) nem lenne másodrendű), de x , y és y' nem feltétlenül szerepel az egyenletben

Definíció (Hiányos egyenlet)

Egy másodrendű diffegyenlet **hiányos**, ha az x, y, y' változók közül legalább az egyik hiányzik.

Nem tudunk tetszőleges (9) alakú diffegyenletet megoldani, de igen, ha:

- ❶ y és y' hiányzik

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Egy másodrendű diffegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (9)$$

valamilyen F függvénnyel, ami biztosan függ y'' -től (különben (9) nem lenne másodrendű), de x , y és y' nem feltétlenül szerepel az egyenletben

Definíció (Hiányos egyenlet)

Egy másodrendű diffegyenlet **hiányos**, ha az x, y, y' változók közül legalább az egyik hiányzik.

Nem tudunk tetszőleges (9) alakú diffegyenletet megoldani, de igen, ha:

- ① y és y' hiányzik
- ② y hiányzik

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Egy másodrendű diffegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (9)$$

valamilyen F függvénnyel, ami biztosan függ y'' -től (különben (9) nem lenne másodrendű), de x , y és y' nem feltétlenül szerepel az egyenletben

Definíció (Hiányos egyenlet)

Egy másodrendű diffegyenlet **hiányos**, ha az x, y, y' változók közül legalább az egyik hiányzik.

Nem tudunk tetszőleges (9) alakú diffegyenletet megoldani, de igen, ha:

- ❶ y és y' hiányzik
- ❷ y hiányzik
- ❸ x hiányzik

1. eset: y és y' hiányzik

1. eset: y és y' hiányzik

Megoldási módszer:

1. eset: y és y' hiányzik

Megoldási módszer:

Ha a differenciálegyenlet felírható $y'' = f(x)$ alakban, akkor a megoldását az $f(x)$ függvény **kétszeres integrálásával** közvetlenül megkapjuk

1. eset: y és y' hiányzik

Megoldási módszer:

Ha a diffegyenlet felírható $y'' = f(x)$ alakban, akkor a megoldását az $f(x)$ függvény **kétszeres integrálásával** közvetlenül megkapjuk

Feladat

Oldjuk meg az $y'' = 5 + \sin(3x)$ diffegyenletet!

1. eset: y és y' hiányzik

Megoldási módszer:

Ha a differenciálegyenlet felírható $y'' = f(x)$ alakban, akkor a megoldását az $f(x)$ függvény **kétszeres integrálásával** közvetlenül megkapjuk

Feladat

Oldjuk meg az $y'' = 5 + \sin(3x)$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

1. eset: y és y' hiányzik

Megoldási módszer:

Ha a differenciálegyenlet felírható $y'' = f(x)$ alakban, akkor a megoldását az $f(x)$ függvény **kétszeres integrálásával** közvetlenül megkapjuk

Feladat

Oldjuk meg az $y'' = 5 + \sin(3x)$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

- 1 Első integrálás

1. eset: y és y' hiányzik

Megoldási módszer:

Ha a differenciálegyenlet felírható $y'' = f(x)$ alakban, akkor a megoldását az $f(x)$ függvény **kétszeres integrálásával** közvetlenül megkapjuk

Feladat

Oldjuk meg az $y'' = 5 + \sin(3x)$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

① Első integrálás:

$$y' = \int 5 + \sin(3x) \, dx$$

1. eset: y és y' hiányzik

Megoldási módszer:

Ha a differenciálegyenlet felírható $y'' = f(x)$ alakban, akkor a megoldását az $f(x)$ függvény **kétszeres integrálásával** közvetlenül megkapjuk

Feladat

Oldjuk meg az $y'' = 5 + \sin(3x)$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

① Első integrálás:

$$y' = \int 5 + \sin(3x) \, dx = 5x - \frac{\cos(3x)}{3} + c_1 \quad (10)$$

1. eset: y és y' hiányzik

Megoldási módszer:

Ha a differenciálegyenlet felírható $y'' = f(x)$ alakban, akkor a megoldását az $f(x)$ függvény **kétszeres integrálásával** közvetlenül megkapjuk

Feladat

Oldjuk meg az $y'' = 5 + \sin(3x)$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

① Első integrálás:

$$y' = \int 5 + \sin(3x) \, dx = 5x - \frac{\cos(3x)}{3} + c_1 \quad (10)$$

② Második integrálás

1. eset: y és y' hiányzik

Megoldási módszer:

Ha a differenciálegyenlet felírható $y'' = f(x)$ alakban, akkor a megoldását az $f(x)$ függvény **kétszeres integrálásával** közvetlenül megkapjuk

Feladat

Oldjuk meg az $y'' = 5 + \sin(3x)$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

① Első integrálás:

$$y' = \int 5 + \sin(3x) \, dx = 5x - \frac{\cos(3x)}{3} + c_1 \quad (10)$$

② Második integrálás:

$$y = \int 5x - \frac{\cos(3x)}{3} + c_1 \, dx$$

1. eset: y és y' hiányzik

Megoldási módszer:

Ha a differenciálegyenlet felírható $y'' = f(x)$ alakban, akkor a megoldását az $f(x)$ függvény **kétszeres integrálásával** közvetlenül megkapjuk

Feladat

Oldjuk meg az $y'' = 5 + \sin(3x)$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

① Első integrálás:

$$y' = \int 5 + \sin(3x) \, dx = 5x - \frac{\cos(3x)}{3} + c_1 \quad (10)$$

② Második integrálás:

$$y = \int 5x - \frac{\cos(3x)}{3} + c_1 \, dx = \frac{5}{2}x^2 - \frac{\sin(3x)}{9} + c_1x + c_2 \quad (11)$$

2. eset: y hiányzik

2. eset: y hiányzik

Tekintsünk egy $F(x, y', y'') = 0$ alakú diffegyenletet

2. eset: y hiányzik

Tekintsünk egy $F(x, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel y

2. eset: y hiányzik

Tekintsünk egy $F(x, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel y

Megoldási módszer:

2. eset: y hiányzik

Tekintsünk egy $F(x, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel y

Megoldási módszer:

- 1 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést

2. eset: y hiányzik

Tekintsünk egy $F(x, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel y

Megoldási módszer:

- 1 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést
- 2 Ekkor $y''(x) = p'(x)$

2. eset: y hiányzik

Tekintsünk egy $F(x, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel y

Megoldási módszer:

- 1 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést
- 2 Ekkor $y''(x) = p'(x)$
- 3 Ezzel a helyettesítéssel az eredeti másodrendű egyenletből egy $p(x)$ -re vonatkozó **elsőrendű** differenciálegyenletet kapunk

2. eset: y hiányzik

Tekintsünk egy $F(x, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel y

Megoldási módszer:

- 1 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést
- 2 Ekkor $y''(x) = p'(x)$
- 3 Ezzel a helyettesítéssel az eredeti másodrendű egyenletből egy $p(x)$ -re vonatkozó **elsőrendű** differenciálegyenletet kapunk
- 4 Miután ezt megoldottuk, a $p(x)$ -et integrálva kapjuk y függvényt

2. eset: y hiányzik

Tekintsünk egy $F(x, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel y

Megoldási módszer:

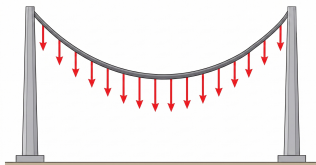
- ① Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést
- ② Ekkor $y''(x) = p'(x)$
- ③ Ezzel a helyettesítéssel az eredeti másodrendű egyenletből egy $p(x)$ -re vonatkozó **elsőrendű** differenciálegyenletet kapunk
- ④ Miután ezt megoldottuk, a $p(x)$ -et integrálva kapjuk y függvényt:

$$y = \int p(x) \, dx$$

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Feladat (Kötélgörbe)

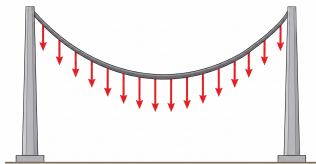
Milyen alakot vesz fel egy két pontban fel-függesztett, γ fajsúlyú, saját súlya alatt lógó kábel (pl. egy távvezeték)?



Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Feladat (Kötélgörbe)

Milyen alakot vesz fel egy két pontban fel-függesztett, γ fajsúlyú, saját súlya alatt lógó kábel (pl. egy távvezeték)?

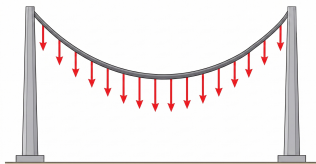


Diffegyenlet felírása:

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Feladat (Kötélgörbe)

Milyen alakot vesz fel egy két pontban fel-függesztett, γ fajsúlyú, saját súlya alatt lógó kábel (pl. egy távvezeték)?



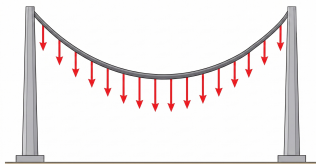
Diffegyenlet felírása:

- Legyen $y(x)$ a kábel alakját megadó görbe

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Feladat (Kötélgörbe)

Milyen alakot vesz fel egy két pontban fel-függesztett, γ fajsúlyú, saját súlya alatt lógó kábel (pl. egy távvezeték)?



Diffegyenlet felírása:

- Legyen $y(x)$ a kötel alakját megadó görbe
- Fizikai megfontolásokból (statikai egyensúly) levezethető, hogy $y(x)$ függvényre teljesül a következő összefüggés:

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2}, \quad (12)$$

ahol V egy konstans

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y
- 2 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést

Méternöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y
- 2 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést: ekkor $y'' = p'$

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y
- 2 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést: ekkor $y'' = p'$, így

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2}$$

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- ① Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y
- ② Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést: ekkor $y'' = p'$, így

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2} \quad \implies \quad p' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + p^2} \quad (13)$$

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y

- 2 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést: ekkor $y'' = p'$, így

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2} \quad \implies \quad p' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + p^2} \quad (13)$$

- 3 A kapott differenciálegyenlet egy elsőrendű **szeparábilis** egyenlet

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y

- 2 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést: ekkor $y'' = p'$, így

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2} \quad \implies \quad p' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + p^2} \quad (13)$$

- 3 A kapott differenciálegyenlet egy elsőrendű **szeparábilis** egyenlet
- 4 Megoldása során az $\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{\gamma}{V} dx$ integrálegyenletet kapjuk

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y

- 2 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést: ekkor $y'' = p'$, így

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2} \quad \implies \quad p' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + p^2} \quad (13)$$

- 3 A kapott differenciálegyenlet egy elsőrendű **szeparábilis** egyenlet
- 4 Megoldása során az $\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{\gamma}{V} dx$ integrálegyenletet kapjuk
- 5 Integrálás után

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y

- 2 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést: ekkor $y'' = p'$, így

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2} \quad \implies \quad p' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + p^2} \quad (13)$$

- 3 A kapott differenciálegyenlet egy elsőrendű **szeparábilis** egyenlet
- 4 Megoldása során az $\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{\gamma}{V} dx$ integrálegyenletet kapjuk
- 5 Integrálás után: $\arcsinh(p)$

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y

- 2 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést: ekkor $y'' = p'$, így

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2} \quad \implies \quad p' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + p^2} \quad (13)$$

- 3 A kapott differenciálegyenlet egy elsőrendű **szeparábilis** egyenlet
- 4 Megoldása során az $\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{\gamma}{V} dx$ integrálegyenletet kapjuk
- 5 Integrálás után: $\operatorname{ar sinh}(p) = \frac{\gamma}{V}x + c_1$,

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y

- 2 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést: ekkor $y'' = p'$, így

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2} \quad \implies \quad p' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + p^2} \quad (13)$$

- 3 A kapott differenciálegyenlet egy elsőrendű **szeparábilis** egyenlet
- 4 Megoldása során az $\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{\gamma}{V} dx$ integrálegyenletet kapjuk
- 5 Integrálás után: $\arcsinh(p) = \frac{\gamma}{V}x + c_1$, azaz $p = \sinh\left(\frac{\gamma}{V}x + c_1\right)$

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- 1 Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y

- 2 Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést: ekkor $y'' = p'$, így

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2} \quad \implies \quad p' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + p^2} \quad (13)$$

- 3 A kapott differenciálegyenlet egy elsőrendű **szeparábilis** egyenlet
- 4 Megoldása során az $\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{\gamma}{V} dx$ integrálegyenletet kapjuk
- 5 Integrálás után: $\arcsinh(p) = \frac{\gamma}{V}x + c_1$, azaz $p = \sinh(\frac{\gamma}{V}x + c_1)$
- 6 Így (12) általános megoldása:

$$y = \int p(x) dx$$

Mérnöki alkalmazás: kötélgörbe

Megoldás:

- ❶ Az előző dián felírt (12) differenciálegyenlet másodrendű, de hiányos: nem szerepel benne y

- ❷ Alkalmazzuk a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést: ekkor $y'' = p'$, így

$$y'' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + (y')^2} \implies p' = \frac{\gamma}{V} \sqrt{1 + p^2} \quad (13)$$

- ❸ A kapott differenciálegyenlet egy elsőrendű **szeparábilis** egyenlet

- ❹ Megoldása során az $\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{\gamma}{V} dx$ integrálegyenletet kapjuk

- ❺ Integrálás után: $\operatorname{arsinh}(p) = \frac{\gamma}{V}x + c_1$, azaz $p = \sinh\left(\frac{\gamma}{V}x + c_1\right)$

- ❻ Így (12) általános megoldása:

$$y = \int p(x) dx \stackrel{\text{❺}}{=} \frac{V}{\gamma} \cdot \cosh\left(\frac{\gamma}{V}x + c_1\right) + c_2 \quad (14)$$

3. eset: x hiányzik

3. eset: x hiányzik

Tekintsünk egy $F(y, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet

3. eset: x hiányzik

Tekintsünk egy $F(y, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel x

3. eset: x hiányzik

Tekintsünk egy $F(y, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel x

Megoldási módszer:

3. eset: x hiányzik

Tekintsünk egy $F(y, y', y'') = 0$ alakú diffegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel x

Megoldási módszer:

- 1 Alkalmazzuk a $p(y) = y'$ helyettesítést

3. eset: x hiányzik

Tekintsünk egy $F(y, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel x

Megoldási módszer:

- 1 Alkalmazzuk a $p(y) = y'$ helyettesítést (ahol p most y függvénye!)

3. eset: x hiányzik

Tekintsünk egy $F(y, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel x

Megoldási módszer:

- ① Alkalmazzuk a $p(y) = y'$ helyettesítést (ahol p most y függvénye!)
- ② A láncszabály értelmében a második derivált:

$$y'' = \frac{dp(y(x))}{dx}$$

3. eset: x hiányzik

Tekintsünk egy $F(y, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel x

Megoldási módszer:

- ① Alkalmazzuk a $p(y) = y'$ helyettesítést (ahol p most y függvénye!)
- ② A láncszabály értelmében a második derivált:

$$y'' = \frac{dp(y(x))}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

3. eset: x hiányzik

Tekintsünk egy $F(y, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel x

Megoldási módszer:

- ① Alkalmazzuk a $p(y) = y'$ helyettesítést (ahol p most y függvénye!)
- ② A láncszabály értelmében a második derivált:

$$y'' = \frac{dp(y(x))}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

3. eset: x hiányzik

Tekintsünk egy $F(y, y', y'') = 0$ alakú differenciálegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel x

Megoldási módszer:

- ➊ Alkalmazzuk a $p(y) = y'$ helyettesítést (ahol p most y függvénye!)
- ➋ A láncszabály értelmében a második derivált:

$$y'' = \frac{dp(y(x))}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

- ➌ Ezt behelyettesítve egy **elsőrendű** differenciálegyenletet kapunk $p(y)$ -ra

3. eset: x hiányzik

Tekintsünk egy $F(y, y', y'') = 0$ alakú diffegyenletet, azaz egy olyan másodrendű egyenletet, amiben nem szerepel x

Megoldási módszer:

- ① Alkalmazzuk a $p(y) = y'$ helyettesítést (ahol p most y függvénye!)
- ② A láncszabály értelmében a második derivált:

$$y'' = \frac{dp(y(x))}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

- ③ Ezt behelyettesítve egy **elsőrendű** diffegyenletet kapunk $p(y)$ -ra
- ④ A $p(y)$ meghatározása után az $y' = p(y)$ **szétválasztható** változójú egyenletet kell még megoldanunk y -ra

3. eset: x hiányzik

Feladat

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 0. \quad (15)$$

3. eset: x hiányzik

Feladat

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 0. \quad (15)$$

Megoldás:

3. eset: x hiányzik

Feladat

Határozzuk meg az alábbi diffegyenlet általános megoldását:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 0. \quad (15)$$

Megoldás:

① (15) hiányos

3. eset: x hiányzik

Feladat

Határozzuk meg az alábbi diffegyenlet általános megoldását:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 0. \quad (15)$$

Megoldás:

① (15) hiányos: nem szerepel benne x

3. eset: x hiányzik

Feladat

Határozzuk meg az alábbi diffegyenlet általános megoldását:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 0. \quad (15)$$

Megoldás:

- ① (15) hiányos: nem szerepel benne x , így az $y' = p(y)$ helyettesítést használjuk

3. eset: x hiányzik

Feladat

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 0. \quad (15)$$

Megoldás:

- ① (15) hiányos: nem szerepel benne x , így az $y' = p(y)$ helyettesítést használjuk, ekkor $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$

3. eset: x hiányzik

Feladat

Határozzuk meg az alábbi diffegyenlet általános megoldását:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 0. \quad (15)$$

Megoldás:

- ① (15) hiányos: nem szerepel benne x , így az $y' = p(y)$ helyettesítést használjuk, ekkor $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$
- ② Így behelyettesítés után (15)-ből az alábbi egyenlet adódik:

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \quad (16)$$

3. eset: x hiányzik

Feladat

Határozzuk meg az alábbi diffegyenlet általános megoldását:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 0. \quad (15)$$

Megoldás:

- ① (15) hiányos: nem szerepel benne x , így az $y' = p(y)$ helyettesítést használjuk, ekkor $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$

- ② Így behelyettesítés után (15)-ből az alábbi egyenlet adódik:

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \quad (16)$$

- ③ Átrendezés után ($p \neq 0$ esetén) azt kapjuk, hogy $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$

3. eset: x hiányzik

Feladat

Határozzuk meg az alábbi diffegyenlet általános megoldását:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 0. \quad (15)$$

Megoldás:

- ① (15) hiányos: nem szerepel benne x , így az $y' = p(y)$ helyettesítést használjuk, ekkor $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$

- ② Így behelyettesítés után (15)-ből az alábbi egyenlet adódik:

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \quad (16)$$

- ③ Átrendezés után ($p \neq 0$ esetén) azt kapjuk, hogy $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$, ami egy elsőrendű **szeparábilis** diffegyenlet $p(y)$ -ra

3. eset: x hiányzik

Feladat

Határozzuk meg az alábbi diffegyenlet általános megoldását:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 0. \quad (15)$$

Megoldás:

- ① (15) hiányos: nem szerepel benne x , így az $y' = p(y)$ helyettesítést használjuk, ekkor $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$

- ② Így behelyettesítés után (15)-ből az alábbi egyenlet adódik:

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \quad (16)$$

- ③ Átrendezés után ($p \neq 0$ esetén) azt kapjuk, hogy $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$, ami egy elsőrendű **szeparábilis** diffegyenlet $p(y)$ -ra

Megjegyzés: $p = 0$ esetből az $y \equiv c$ konstans megoldások adódnak

3. eset: x hiányzik

Megoldás (folytatás):

3. eset: x hiányzik

Megoldás (folytatás):

- ④ A $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$ diffegyenlet megoldása során az $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y}$ integrálegyenletet kapjuk

3. eset: x hiányzik

Megoldás (folytatás):

- 4 A $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$ diffegyenlet megoldása során az $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y}$ integrálegyenletet kapjuk
- 5 Integrálás után:

$$\ln |p| = -\ln |y| + c_1$$

3. eset: x hiányzik

Megoldás (folytatás):

- 4 A $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$ diffegyenlet megoldása során az $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y}$ integrálegyenletet kapjuk
- 5 Integrálások után:

$$\ln |p| = -\ln |y| + c_1, \quad \text{így} \quad p(y) = \frac{\tilde{c}_1}{y} \quad (17)$$

3. eset: x hiányzik

Megoldás (folytatás):

- 4 A $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$ diffegyenlet megoldása során az $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y}$ integrálegyenletet kapjuk
- 5 Integrálások után:

$$\ln |p| = -\ln |y| + c_1, \quad \text{így} \quad p(y) = \frac{\tilde{c}_1}{y} \quad (17)$$

- 6 Ezután y az $y' = p(y)$ **szeparábilis** egyenlet megoldásaként adódik

3. eset: x hiányzik

Megoldás (folytatás):

- 4 A $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$ diffegyenlet megoldása során az $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y}$ integrálegyenletet kapjuk
- 5 Integrálások után:

$$\ln |p| = -\ln |y| + c_1, \quad \text{így} \quad p(y) = \frac{\tilde{c}_1}{y} \quad (17)$$

- 6 Ezután y az $y' = p(y)$ **szeparábilis** egyenlet megoldásaként adódik, vagyis az $y' = \frac{\tilde{c}_1}{y}$ diffegyenlet megoldását keressük

3. eset: x hiányzik

Megoldás (folytatás):

- 4 A $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$ differenciálegyenlet megoldása során az $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y}$ integrálegyenletet kapjuk
- 5 Integrálás után:

$$\ln |p| = -\ln |y| + c_1, \quad \text{így} \quad p(y) = \frac{\tilde{c}_1}{y} \quad (17)$$

- 6 Ezután y az $y' = p(y)$ **szeparábilis** egyenlet megoldásaként adódik, vagyis az $y' = \frac{\tilde{c}_1}{y}$ differenciálegyenlet megoldását keressük
- 7 Ennek megoldása során $\int y \, dy = \int \tilde{c}_1 \, dx$ integrálegyenletet kapjuk

3. eset: x hiányzik

Megoldás (folytatás):

- 4 A $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$ differenciálegyenlet megoldása során az $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y}$ integrálegyenletet kapjuk

- 5 Integrálások után:

$$\ln |p| = -\ln |y| + c_1, \quad \text{így} \quad p(y) = \frac{\tilde{c}_1}{y} \quad (17)$$

- 6 Ezután y az $y' = p(y)$ **szeparábilis** egyenlet megoldásaként adódik, vagyis az $y' = \frac{\tilde{c}_1}{y}$ differenciálegyenlet megoldását keressük

- 7 Ennek megoldása során $\int y \, dy = \int \tilde{c}_1 \, dx$ integrálegyenletet kapjuk

- 8 Integrálások után:

$$\frac{y^2}{2} = \tilde{c}_1 x + c_2 \quad (18)$$

3. eset: x hiányzik

Megoldás (folytatás):

- 4 A $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$ differenciálegyenlet megoldása során az $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y}$ integrálegyenletet kapjuk

- 5 Integrálások után:

$$\ln |p| = -\ln |y| + c_1, \quad \text{így} \quad p(y) = \frac{\tilde{c}_1}{y} \quad (17)$$

- 6 Ezután y az $y' = p(y)$ **szeparábilis** egyenlet megoldásaként adódik, vagyis az $y' = \frac{\tilde{c}_1}{y}$ differenciálegyenlet megoldását keressük

- 7 Ennek megoldása során $\int y \, dy = \int \tilde{c}_1 \, dx$ integrálegyenletet kapjuk

- 8 Integrálások után:

$$\frac{y^2}{2} = \tilde{c}_1 x + c_2 \quad (18)$$

(amiből y akár expliciten is kifejezhető)

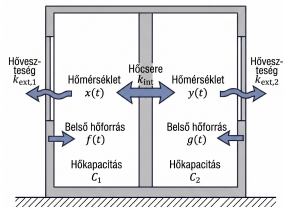
- 1 Konstans variációs módszer
- 2 Hiányos másodrendű egyenletek
- 3 Differenciálegyenlet-rendszerek

Mérnöki alkalmazás: épületek hőtechnikai modellje

Mérnöki alkalmazás: épületek hőtechnikai modellje

Szomszédos helyiségek hőmérséklet

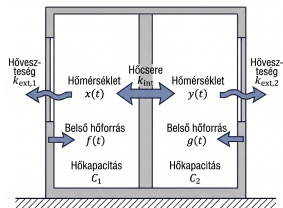
Tegyük fel, hogy egy épület két szomszédos szobájának hőmérséklete $x(t)$ és $y(t)$. A szobák a közös belső falon át hőt cserélnek egymással, a külső falakon át pedig a külvilággal.



Mérnöki alkalmazás: épületek hőtechnikai modellje

Szomszédos helyiségek hőmérséklet

Tegyük fel, hogy egy épület két szomszédos szobájának hőmérséklete $x(t)$ és $y(t)$. A szobák a közös belső falon át hőt cserélnek egymással, a külső falakon át pedig a külvilággal.

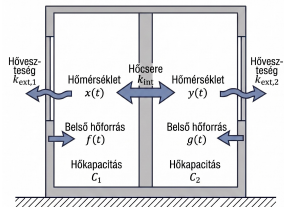


Mivel a rendszer (a közös fal miatt) **csatolt**, a két szoba hőmérséklete csak egyszerre, egy **elsőrendű lineáris egyenletrendszerrel** írható le

Mérnöki alkalmazás: épületek hőtechnikai modellje

Szomszédos helyiségek hőmérséklet

Tegyük fel, hogy egy épület két szomszédos szobájának hőmérséklete $x(t)$ és $y(t)$. A szobák a közös belső falon át hőt cserélnek egymással, a külső falakon át pedig a külvilággal.



Mivel a rendszer (a közös fal miatt) **csatolt**, a két szoba hőmérséklete csak egyszerre, egy **elsőrendű lineáris egyenletrendszerrel** írható le:

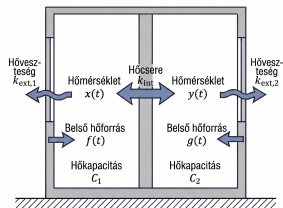
$$C_1 x' + (k_{\text{ext},1} + k_{\text{int}})x - k_{\text{int}}y = f(t) \quad (19)$$

$$C_2 y' - k_{\text{int}}x + (k_{\text{ext},2} + k_{\text{int}})y = g(t), \quad (20)$$

Mérnöki alkalmazás: épületek hőtechnikai modellje

Szomszédos helyiségek hőmérséklet

Tegyük fel, hogy egy épület két szomszédos szobájának hőmérséklete $x(t)$ és $y(t)$. A szobák a közös belső falon át hőt cserélnek egymással, a külső falakon át pedig a külvilággal.



Mivel a rendszer (a közös fal miatt) **csatolt**, a két szoba hőmérséklete csak egyszerre, egy **elsőrendű lineáris egyenletrendszerrel** írható le:

$$C_1 x' + (k_{ext,1} + k_{int})x - k_{int}y = f(t) \quad (19)$$

$$C_2 y' - k_{int}x + (k_{ext,2} + k_{int})y = g(t), \quad (20)$$

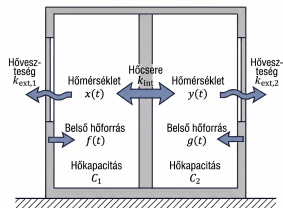
ahol

- C_1, C_2 : a szobák hőkapacitása

Mérnöki alkalmazás: épületek hőtechnikai modellje

Szomszédos helyiségek hőmérséklet

Tegyük fel, hogy egy épület két szomszédos szobájának hőmérséklete $x(t)$ és $y(t)$. A szobák a közös belső falon át hőt cserélnek egymással, a külső falakon át pedig a külvilággal.



Mivel a rendszer (a közös fal miatt) **csatolt**, a két szoba hőmérséklete csak egyszerre, egy **elsőrendű lineáris egyenletrendszerrel** írható le:

$$C_1 x' + (k_{ext,1} + k_{int})x - k_{int}y = f(t) \quad (19)$$

$$C_2 y' - k_{int}x + (k_{ext,2} + k_{int})y = g(t), \quad (20)$$

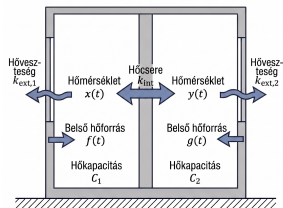
ahol

- C_1, C_2 : a szobák hőkapacitása
- k_{int}, k_{ext} : a belső és külső falak hőátbocsátási tényezője

Mérnöki alkalmazás: épületek hőtechnikai modellje

Szomszédos helyiségek hőmérséklet

Tegyük fel, hogy egy épület két szomszédos szobájának hőmérséklete $x(t)$ és $y(t)$. A szobák a közös belső falon át hőt cserélnek egymással, a külső falakon át pedig a külvilággal.



Mivel a rendszer (a közös fal miatt) **csatolt**, a két szoba hőmérséklete csak egyszerre, egy **elsőrendű lineáris egyenletrendszerrel** írható le:

$$C_1 x' + (k_{ext,1} + k_{int})x - k_{int}y = f(t) \quad (19)$$

$$C_2 y' - k_{int}x + (k_{ext,2} + k_{int})y = g(t), \quad (20)$$

ahol

- C_1, C_2 : a szobák hőkapacitása
- k_{int}, k_{ext} : a belső és külső falak hőátbocsátási tényezője
- $f(t), g(t)$: a fűtésből és a külső hőmérsékletből származó hatások

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Cél: Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1 x' + b_1 x + c_1 y' + d_1 y = f(t) \quad (21)$$

$$a_2 x' + b_2 x + c_2 y' + d_2 y = g(t), \quad (22)$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Cél: Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1 x' + b_1 x + c_1 y' + d_1 y = f(t) \quad (21)$$

$$a_2 x' + b_2 x + c_2 y' + d_2 y = g(t), \quad (22)$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i adott konstansok

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Cél: Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1 x' + b_1 x + c_1 y' + d_1 y = f(t) \quad (21)$$

$$a_2 x' + b_2 x + c_2 y' + d_2 y = g(t), \quad (22)$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i adott konstansok, $f(t)$, $g(t)$ adott függvények

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Cél: Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1 x' + b_1 x + c_1 y' + d_1 y = f(t) \quad (21)$$

$$a_2 x' + b_2 x + c_2 y' + d_2 y = g(t), \quad (22)$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i adott konstansok, $f(t)$, $g(t)$ adott függvények

Megoldási módszer:

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Cél: Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1 x' + b_1 x + c_1 y' + d_1 y = f(t) \quad (21)$$

$$a_2 x' + b_2 x + c_2 y' + d_2 y = g(t), \quad (22)$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i adott konstansok, $f(t), g(t)$ adott függvények

Megoldási módszer:

- A diffegyenlet-rendszert átalakítjuk két (legfeljebb) **másodrendű** diffegyenletté

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Cél: Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1 x' + b_1 x + c_1 y' + d_1 y = f(t) \quad (21)$$

$$a_2 x' + b_2 x + c_2 y' + d_2 y = g(t), \quad (22)$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i adott konstansok, $f(t), g(t)$ adott függvények

Megoldási módszer:

- A diffegyenlet-rendszert átalakítjuk két (legfeljebb) **másodrendű** diffegyenletté
- Ehhez a **Cramer-szabályt** használjuk

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Cél: Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1 x' + b_1 x + c_1 y' + d_1 y = f(t) \quad (21)$$

$$a_2 x' + b_2 x + c_2 y' + d_2 y = g(t), \quad (22)$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i adott konstansok, $f(t), g(t)$ adott függvények

Megoldási módszer:

- A diffegyenlet-rendszert átalakítjuk két (legfeljebb) **másodrendű** diffegyenletté
- Ehhez a **Cramer-szabályt** használjuk

Emlékeztető (Cramer-szabály, Matek A2)

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Cél: Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1 x' + b_1 x + c_1 y' + d_1 y = f(t) \quad (21)$$

$$a_2 x' + b_2 x + c_2 y' + d_2 y = g(t), \quad (22)$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i adott konstansok, $f(t), g(t)$ adott függvények

Megoldási módszer:

- A differenciálegyenlet-rendszert átalakítjuk két (legfeljebb) **másodrendű** differenciálegyenletté
- Ehhez a **Cramer-szabályt** használjuk

Emlékeztető (Cramer-szabály, Matek A2)

Az $\mathbf{Ax} = \underline{b}$ (ahol $\det \mathbf{A} \neq 0$) lineáris egyenletrendszer egyértelmű megoldásának j -edik koordinátája: $x_j = \frac{\det \mathbf{A}_j}{\det \mathbf{A}}$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Cél: Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1 x' + b_1 x + c_1 y' + d_1 y = f(t) \quad (21)$$

$$a_2 x' + b_2 x + c_2 y' + d_2 y = g(t), \quad (22)$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i adott konstansok, $f(t), g(t)$ adott függvények

Megoldási módszer:

- A differenciálegyenlet-rendszert átalakítjuk két (legfeljebb) **másodrendű** differenciálegyenletté
- Ehhez a **Cramer-szabályt** használjuk

Emlékeztető (Cramer-szabály, Matek A2)

Az $\mathbf{Ax} = \underline{b}$ (ahol $\det \mathbf{A} \neq 0$) lineáris egyenletrendszer egyértelmű megoldásának j -edik koordinátája: $x_j = \frac{\det \mathbf{A}_j}{\det \mathbf{A}}$, ahol $\mathbf{A}_j$ mátrixot úgy kapjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixban a j -edik oszlopot kicseréljük a $\underline{b}$ oszlopvektorral.

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megoldás lépései:

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megoldás lépései:

- 1 Bevezetjük a D deriválási operátort

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megoldás lépései:

- 1 Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megoldás lépései:

- 1 Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli: $Dx = x'$, $Dy = y'$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megoldás lépései:

- 1 Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli: $Dx = x'$, $Dy = y'$
- 2 Kiszámoljuk az alábbi determinánsokat:

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megoldás lépései:

- 1 Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli: $Dx = x'$, $Dy = y'$
- 2 Kiszámoljuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 D + b_1 & c_1 D + d_1 \\ a_2 D + b_2 & c_2 D + d_2 \end{vmatrix}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megoldás lépései:

- 1 Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli: $Dx = x'$, $Dy = y'$
- 2 Kiszámoljuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 D + b_1 & c_1 D + d_1 \\ a_2 D + b_2 & c_2 D + d_2 \end{vmatrix},$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} f(t) & c_1 D + d_1 \\ g(t) & c_2 D + d_2 \end{vmatrix}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megoldás lépései:

- 1 Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli: $Dx = x'$, $Dy = y'$
- 2 Kiszámoljuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 D + b_1 & c_1 D + d_1 \\ a_2 D + b_2 & c_2 D + d_2 \end{vmatrix},$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} f(t) & c_1 D + d_1 \\ g(t) & c_2 D + d_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} a_1 D + b_1 & f(t) \\ a_2 D + b_2 & g(t) \end{vmatrix}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megoldás lépései:

- 1 Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli: $Dx = x'$, $Dy = y'$
- 2 Kiszámoljuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 D + b_1 & c_1 D + d_1 \\ a_2 D + b_2 & c_2 D + d_2 \end{vmatrix},$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} f(t) & c_1 D + d_1 \\ g(t) & c_2 D + d_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} a_1 D + b_1 & f(t) \\ a_2 D + b_2 & g(t) \end{vmatrix}$$

- 3 Ha $\Delta \neq 0$, akkor megoldjuk a $\Delta x = \alpha$, $\Delta y = \beta$ differenciálegyenleteket

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megoldás lépései:

- 1 Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli: $Dx = x'$, $Dy = y'$
- 2 Kiszámoljuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 D + b_1 & c_1 D + d_1 \\ a_2 D + b_2 & c_2 D + d_2 \end{vmatrix},$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} f(t) & c_1 D + d_1 \\ g(t) & c_2 D + d_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} a_1 D + b_1 & f(t) \\ a_2 D + b_2 & g(t) \end{vmatrix}$$

- 3 Ha $\Delta \neq 0$, akkor megoldjuk a $\Delta x = \alpha$, $\Delta y = \beta$ differenciálegyenleteket
- 4 Az így kapott $x(t)$, $y(t)$ megoldásokat visszahelyettesítjük (21), (22) egyenletek valamelyikébe

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megoldás lépései:

- 1 Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli: $Dx = x'$, $Dy = y'$
- 2 Kiszámoljuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 D + b_1 & c_1 D + d_1 \\ a_2 D + b_2 & c_2 D + d_2 \end{vmatrix},$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} f(t) & c_1 D + d_1 \\ g(t) & c_2 D + d_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} a_1 D + b_1 & f(t) \\ a_2 D + b_2 & g(t) \end{vmatrix}$$

- 3 Ha $\Delta \neq 0$, akkor megoldjuk a $\Delta x = \alpha$, $\Delta y = \beta$ differenciálegyenleteket
- 4 Az így kapott $x(t)$, $y(t)$ megoldásokat visszahelyettesítjük (21), (22) egyenletek valamelyikébe
- 5 Így (például) az $y(t)$ egyenletében szereplő konstansok kifejezhetők az $x(t)$ -ben szereplő konstansokkal

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

Feladat

Adjuk meg az alábbi diffegyenlet-rendszer általános megoldását:

$$2x' + y' - 4x - y = e^{2t} \quad (23)$$

$$x' + 3x + y = 0. \quad (24)$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

Feladat

Adjuk meg az alábbi diffegyenlet-rendszer általános megoldását:

$$2x' + y' - 4x - y = e^{2t} \quad (23)$$

$$x' + 3x + y = 0. \quad (24)$$

Megoldás:

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

Feladat

Adjuk meg az alábbi diffegyenlet-rendszer általános megoldását:

$$2x' + y' - 4x - y = e^{2t} \quad (23)$$

$$x' + 3x + y = 0. \quad (24)$$

Megoldás:

- 1 Felírás a D operátorral

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

Feladat

Adjuk meg az alábbi diffegyenlet-rendszer általános megoldását:

$$2x' + y' - 4x - y = e^{2t} \quad (23)$$

$$x' + 3x + y = 0. \quad (24)$$

Megoldás:

① Felírás a D operátorral:

$$(2D - 4)x + (D - 1)y = e^{2t} \quad (23')$$

$$(24')$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

Feladat

Adjuk meg az alábbi diffegyenlet-rendszer általános megoldását:

$$2x' + y' - 4x - y = e^{2t} \quad (23)$$

$$x' + 3x + y = 0. \quad (24)$$

Megoldás:

① Felírás a D operátorral:

$$(2D - 4)x + (D - 1)y = e^{2t} \quad (23')$$

$$(D + 3)x + y = 0 \quad (24')$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

Feladat

Adjuk meg az alábbi diffegyenlet-rendszer általános megoldását:

$$2x' + y' - 4x - y = e^{2t} \quad (23)$$

$$x' + 3x + y = 0. \quad (24)$$

Megoldás:

- ① Felírás a D operátorral:

$$(2D - 4)x + (D - 1)y = e^{2t} \quad (23')$$

$$(D + 3)x + y = 0 \quad (24')$$

- ② Kiszámoljuk a rendszer determinánsát

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

Feladat

Adjuk meg az alábbi diffegyenlet-rendszer általános megoldását:

$$2x' + y' - 4x - y = e^{2t} \quad (23)$$

$$x' + 3x + y = 0. \quad (24)$$

Megoldás:

① Felírás a D operátorral:

$$(2D - 4)x + (D - 1)y = e^{2t} \quad (23')$$

$$(D + 3)x + y = 0 \quad (24')$$

② Kiszámoljuk a rendszer determinánsát:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2D - 4 & D - 1 \\ D + 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

Feladat

Adjuk meg az alábbi diffegyenlet-rendszer általános megoldását:

$$2x' + y' - 4x - y = e^{2t} \quad (23)$$

$$x' + 3x + y = 0. \quad (24)$$

Megoldás:

① Felírás a D operátorral:

$$(2D - 4)x + (D - 1)y = e^{2t} \quad (23')$$

$$(D + 3)x + y = 0 \quad (24')$$

② Kiszámoljuk a rendszer determinánsát:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2D - 4 & D - 1 \\ D + 3 & 1 \end{vmatrix} = (2D - 4) \cdot 1 - (D - 1) \cdot (D + 3)$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

Feladat

Adjuk meg az alábbi diffegyenlet-rendszer általános megoldását:

$$2x' + y' - 4x - y = e^{2t} \quad (23)$$

$$x' + 3x + y = 0. \quad (24)$$

Megoldás:

① Felírás a D operátorral:

$$(2D - 4)x + (D - 1)y = e^{2t} \quad (23')$$

$$(D + 3)x + y = 0 \quad (24')$$

② Kiszámoljuk a rendszer determinánsát:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2D - 4 & D - 1 \\ D + 3 & 1 \end{vmatrix} = (2D - 4) \cdot 1 - (D - 1) \cdot (D + 3) =$$

$$- (D^2 + 1) \neq 0$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

③ Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

③ Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D - 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

③ Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D - 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

3 Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 2D-4 & e^{2t} \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

③ Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 2D-4 & e^{2t} \\ D+3 & 0 \end{vmatrix} = -(D+3)e^{2t}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

③ Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 2D-4 & e^{2t} \\ D+3 & 0 \end{vmatrix} = -(D+3)e^{2t} = -2e^{2t} - 3e^{2t}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

③ Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 2D-4 & e^{2t} \\ D+3 & 0 \end{vmatrix} = -(D+3)e^{2t} = -2e^{2t} - 3e^{2t} = -5e^{2t}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- ③ Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 2D-4 & e^{2t} \\ D+3 & 0 \end{vmatrix} = -(D+3)e^{2t} = -2e^{2t} - 3e^{2t} = -5e^{2t}$$

- ④ Így a megoldandó másodrendű diffegyenletek:

$$-(D^2 + 1)x = e^{2t},$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- ③ Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 2D-4 & e^{2t} \\ D+3 & 0 \end{vmatrix} = -(D+3)e^{2t} = -2e^{2t} - 3e^{2t} = -5e^{2t}$$

- ④ Így a megoldandó másodrendű diffegyenletek:

$$-(D^2 + 1)x = e^{2t}, \quad \text{azaz} \quad -x'' - x = e^{2t}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- 3 Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 2D-4 & e^{2t} \\ D+3 & 0 \end{vmatrix} = -(D+3)e^{2t} = -2e^{2t} - 3e^{2t} = -5e^{2t}$$

- 4 Így a megoldandó másodrendű diffegyenletek:

$$-(D^2 + 1)x = e^{2t}, \quad \text{azaz} \quad -x'' - x = e^{2t},$$

$$-(D^2 + 1)y = -5e^{2t}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- 3 Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 2D-4 & e^{2t} \\ D+3 & 0 \end{vmatrix} = -(D+3)e^{2t} = -2e^{2t} - 3e^{2t} = -5e^{2t}$$

- 4 Így a megoldandó másodrendű diffegyenletek:

$$-(D^2 + 1)x = e^{2t}, \quad \text{azaz} \quad -x'' - x = e^{2t},$$

$$-(D^2 + 1)y = -5e^{2t}, \quad \text{azaz} \quad -y'' - y = -5e^{2t}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- 3 Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 2D-4 & e^{2t} \\ D+3 & 0 \end{vmatrix} = -(D+3)e^{2t} = -2e^{2t} - 3e^{2t} = -5e^{2t}$$

- 4 Így a megoldandó másodrendű diffegyenletek:

$$-(D^2 + 1)x = e^{2t}, \quad \text{azaz} \quad -x'' - x = e^{2t},$$

$$-(D^2 + 1)y = -5e^{2t}, \quad \text{azaz} \quad -y'' - y = -5e^{2t}$$

- 5 Ezeket meg tudjuk oldani például **próbafüggvény-módszerrel**

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- 3 Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 2D-4 & e^{2t} \\ D+3 & 0 \end{vmatrix} = -(D+3)e^{2t} = -2e^{2t} - 3e^{2t} = -5e^{2t}$$

- 4 Így a megoldandó másodrendű diffegyenletek:

$$-(D^2 + 1)x = e^{2t}, \quad \text{azaz} \quad -x'' - x = e^{2t},$$

$$-(D^2 + 1)y = -5e^{2t}, \quad \text{azaz} \quad -y'' - y = -5e^{2t}$$

- 5 Ezeket meg tudjuk oldani például **próbafüggvény-módszerrel**:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{5}e^{2t}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- 3 Ekkor az új diffegyenletek jobb oldalai:

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^{2t} & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} 2D-4 & e^{2t} \\ D+3 & 0 \end{vmatrix} = -(D+3)e^{2t} = -2e^{2t} - 3e^{2t} = -5e^{2t}$$

- 4 Így a megoldandó másodrendű diffegyenletek:

$$-(D^2 + 1)x = e^{2t}, \quad \text{azaz} \quad -x'' - x = e^{2t},$$

$$-(D^2 + 1)y = -5e^{2t}, \quad \text{azaz} \quad -y'' - y = -5e^{2t}$$

- 5 Ezeket meg tudjuk oldani például **próbafüggvény-módszerrel**:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{5}e^{2t}$$

$$y(t) = c_3 \cos t + c_4 \sin t + e^{2t}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- 6 Csak két szabad paraméter lehet, így a kapott megoldásokat vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- ⑥ Csak két szabad paraméter lehet, így a kapott megoldásokat vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe, pl. az $x' + 3x + y = 0$ egyenletbe (lásd (24))

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- ⑥ Csak két szabad paraméter lehet, így a kapott megoldásokat vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe, pl. az $x' + 3x + y = 0$ egyenletbe (lásd (24)):

$$\left(-c_1 \sin t + c_2 \cos t - \frac{2}{5}e^{2t}\right) + 3 \left(c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{5}e^{2t}\right) + \left(c_3 \cos t + c_4 \sin t + e^{2t}\right) = 0$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- ⑥ Csak két szabad paraméter lehet, így a kapott megoldásokat vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe, pl. az $x' + 3x + y = 0$ egyenletbe (lásd (24)):

$$\begin{aligned} \left(-c_1 \sin t + c_2 \cos t - \cancel{\frac{2}{5}e^{2t}} \right) + 3 \left(c_1 \cos t + c_2 \sin t - \cancel{\frac{1}{5}e^{2t}} \right) + \\ \left(c_3 \cos t + c_4 \sin t + \cancel{e^{2t}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- ⑥ Csak két szabad paraméter lehet, így a kapott megoldásokat vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe, pl. az $x' + 3x + y = 0$ egyenletbe (lásd (24)):

$$\left(-c_1 \sin t + c_2 \cos t - \cancel{\frac{2}{5}e^{2t}}\right) + 3\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t - \cancel{\frac{1}{5}e^{2t}}\right) + \left(c_3 \cos t + c_4 \sin t + \cancel{e^{2t}}\right) = 0$$

- ⑦ Innen $\sin t \cdot (-c_1 + 3c_2 + c_4) + \cos t \cdot (c_2 + 3c_1 + c_3) = 0$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- ⑥ Csak két szabad paraméter lehet, így a kapott megoldásokat vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe, pl. az $x' + 3x + y = 0$ egyenletbe (lásd (24)):

$$\left(-c_1 \sin t + c_2 \cos t - \cancel{\frac{2}{5}e^{2t}}\right) + 3\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t - \cancel{\frac{1}{5}e^{2t}}\right) + \left(c_3 \cos t + c_4 \sin t + \cancel{e^{2t}}\right) = 0$$

- ⑦ Innen $\sin t \cdot (-c_1 + 3c_2 + c_4) + \cos t \cdot (c_2 + 3c_1 + c_3) = 0$
- ⑧ Így y -ra kapott kifejezésbeli konstansok kifejezhetők

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- ⑥ Csak két szabad paraméter lehet, így a kapott megoldásokat vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe, pl. az $x' + 3x + y = 0$ egyenletbe (lásd (24)):

$$\left(-c_1 \sin t + c_2 \cos t - \cancel{\frac{2}{5}e^{2t}}\right) + 3\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t - \cancel{\frac{1}{5}e^{2t}}\right) + \left(c_3 \cos t + c_4 \sin t + \cancel{e^{2t}}\right) = 0$$

- ⑦ Innen $\sin t \cdot (-c_1 + 3c_2 + c_4) + \cos t \cdot (c_2 + 3c_1 + c_3) = 0$
- ⑧ Így y -ra kapott kifejezésbeli konstansok kifejezhetők:

$$c_3 = -3c_1 - c_2, \quad c_4 = c_1 - 3c_2$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- ⑥ Csak két szabad paraméter lehet, így a kapott megoldásokat vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe, pl. az $x' + 3x + y = 0$ egyenletbe (lásd (24)):

$$\left(-c_1 \sin t + c_2 \cos t - \cancel{\frac{2}{5}e^{2t}}\right) + 3\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t - \cancel{\frac{1}{5}e^{2t}}\right) + \left(c_3 \cos t + c_4 \sin t + \cancel{e^{2t}}\right) = 0$$

- ⑦ Innen $\sin t \cdot (-c_1 + 3c_2 + c_4) + \cos t \cdot (c_2 + 3c_1 + c_3) = 0$
- ⑧ Így y -ra kapott kifejezésbeli konstansok kifejezhetők:

$$c_3 = -3c_1 - c_2, \quad c_4 = c_1 - 3c_2$$

- ⑨ Tehát a (23), (24) rendszer általános megoldása

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: példa

- ⑥ Csak két szabad paraméter lehet, így a kapott megoldásokat vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe, pl. az $x' + 3x + y = 0$ egyenletbe (lásd (24)):

$$\left(-c_1 \sin t + c_2 \cos t - \cancel{\frac{2}{5}e^{2t}}\right) + 3\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t - \cancel{\frac{1}{5}e^{2t}}\right) + \left(c_3 \cos t + c_4 \sin t + \cancel{e^{2t}}\right) = 0$$

- ⑦ Innen $\sin t \cdot (-c_1 + 3c_2 + c_4) + \cos t \cdot (c_2 + 3c_1 + c_3) = 0$
- ⑧ Így y -ra kapott kifejezésbeli konstansok kifejezhetők:

$$c_3 = -3c_1 - c_2, \quad c_4 = c_1 - 3c_2$$

- ⑨ Tehát a (23), (24) rendszer általános megoldása:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{5}e^{2t}$$

$$y(t) = -(3c_1 + c_2) \cos t + (c_1 - 3c_2) \sin t + e^{2t}$$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- 1 Másodrendű lineáris egyenletek partikuláris megoldása konstans variációs módszerrel: $y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- 1 Másodrendű lineáris egyenletek partikuláris megoldása konstans variációs módszerrel: $y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$
- 2 Hiányos másodrendű egyenletek megoldása

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- ➊ Másodrendű lineáris egyenletek partikuláris megoldása konstans variációs módszerrel: $y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$
- ➋ Hiányos másodrendű egyenletek megoldása:
 - y és y' hiányzik $\implies$ kétszeres integrálás

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- ➊ Másodrendű lineáris egyenletek partikuláris megoldása konstans variációs módszerrel: $y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$
- ➋ Hiányos másodrendű egyenletek megoldása:
 - y és y' hiányzik $\implies$ kétszeres integrálás
 - y hiányzik $\implies p(\textcolor{red}{x}) = y'(x)$ helyettesítés

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- ➊ Másodrendű lineáris egyenletek partikuláris megoldása konstans variációs módszerrel: $y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$
- ➋ Hiányos másodrendű egyenletek megoldása:
 - y és y' hiányzik $\implies$ kétszeres integrálás
 - y hiányzik $\implies p(\textcolor{red}{x}) = y'(x)$ helyettesítés
 - x hiányzik $\implies p(\textcolor{red}{y}) = y'$ helyettesítés

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- 1 Másodrendű lineáris egyenletek partikuláris megoldása konstans variációs módszerrel: $y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$
- 2 Hiányos másodrendű egyenletek megoldása:
 - y és y' hiányzik $\implies$ kétszeres integrálás
 - y hiányzik $\implies p(x) = y'(x)$ helyettesítés
 - x hiányzik $\implies p(y) = y'$ helyettesítés
- 3 Differenciálegyenlet-rendszerek:

$$a_1x' + b_1x + c_1y' + d_1y = f(t)$$

$$a_2x' + b_2x + c_2y' + d_2y = g(t),$$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- 1 Másodrendű lineáris egyenletek partikuláris megoldása konstans variációs módszerrel: $y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$
- 2 Hiányos másodrendű egyenletek megoldása:
 - y és y' hiányzik $\implies$ kétszeres integrálás
 - y hiányzik $\implies p(x) = y'(x)$ helyettesítés
 - x hiányzik $\implies p(y) = y'$ helyettesítés
- 3 Differenciálegyenlet-rendszerek:

$$a_1x' + b_1x + c_1y' + d_1y = f(t)$$

$$a_2x' + b_2x + c_2y' + d_2y = g(t),$$

$\implies \Delta x = \alpha, \Delta y = \beta$ megoldása

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- 1 Másodrendű lineáris egyenletek partikuláris megoldása konstans variációs módszerrel: $y_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$
- 2 Hiányos másodrendű egyenletek megoldása:
 - y és y' hiányzik $\implies$ kétszeres integrálás
 - y hiányzik $\implies p(x) = y'(x)$ helyettesítés
 - x hiányzik $\implies p(y) = y'$ helyettesítés
- 3 Differenciálegyenlet-rendszerek:

$$a_1x' + b_1x + c_1y' + d_1y = f(t)$$

$$a_2x' + b_2x + c_2y' + d_2y = g(t),$$

$\implies \Delta x = \alpha, \Delta y = \beta$ megoldása

Köszönöm a figyelmet!