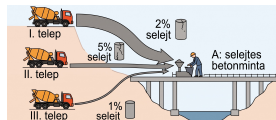
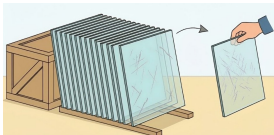


Matematika A3 építőmérnököknek 4. előadás

Valószínűségszámítás alapjai

Szőke Márton

2026. október 19.



1 Valószínűségi alapfogalmak

2 Feltételes valószínűség

3 Függetlenség

1 Valószínűségi alapfogalmak

2 Feltételes valószínűség

3 Függetlenség

Valószínűségszámítás

A körülöttünk lévő világ tele van bizonytalan kimenetelű dolgokkal

Valószínűségszámítás

A körülöttünk lévő világ tele van bizonytalan kimenetelű dolgokkal:

Természeti
jelenségek



Valószínűségszámítás

A körülöttünk lévő világ tele van bizonytalan kimenetelű dolgokkal:

Természeti
jelenségek



Időjárás



Valószínűségszámítás

A körülöttünk lévő világ tele van bizonytalan kimenetelű dolgokkal:

Természeti
jelenségek



Időjárás



Pénzügyi
árfolyamok



Valószínűségszámítás

A körülöttünk lévő világ tele van bizonytalan kimenetelű dolgokkal:

Természeti
jelenségek



Időjárás



Pénzügyi
árfolyamok



Sport-
események



Valószínűségszámítás

A körülöttünk lévő világ tele van bizonytalan kimenetelű dolgokkal:

Természeti
jelenségek



Időjárás



Pénzügyi
árfolyamok



Sport-
események



Cél: Ezeket jobban megérteni, matematikailag modellezni

Valószínűségszámítás

- **Véletlen** eseményeket tanulmányozunk

Valószínűségszámítás

- **Véletlen** eseményeket tanulmányozunk
- Végtelen sokszor, azonos körülmények között megismételhető **kísérletek**

Valószínűségszámítás

- **Véletlen** eseményeket tanulmányozunk
- Végtelen sokszor, azonos körülmények között megismételhető **kísérletek**
- Egyetlen kísérlet eredménye bizonytalan

Valószínűségszámítás

- **Véletlen** eseményeket tanulmányozunk
- Végtelen sokszor, azonos körülmények között megismételhető **kísérletek**
- Egyetlen kísérlet eredménye bizonytalan
- Nagyon sok ismételés esetén szabályosságok tapasztalhatók

Valószínűesszámítás

- **Véletlen** eseményeket tanulmányozunk
- Végtelen sokszor, azonos körülmények között megismételhető **kísérletek**
- Egyetlen kísérlet eredménye bizonytalan
- Nagyon sok ismétlés esetén szabályosságok tapasztalhatók

Példa:

Valószínűségszámítás

- **Véletlen** eseményeket tanulmányozunk
- Végtelen sokszor, azonos körülmények között megismételhető **kísérletek**
- Egyetlen kísérlet eredménye bizonytalan
- Nagyon sok ismétlés esetén szabályosságok tapasztalhatók

Példa: Feldobunk egy szabályos dobókockát



Valószínűségszámítás

- **Véletlen** eseményeket tanulmányozunk
- Végtelen sokszor, azonos körülmények között megismételhető **kísérletek**
- Egyetlen kísérlet eredménye bizonytalan
- Nagyon sok ismétlés esetén szabályosságok tapasztalhatók

Példa: Feldobunk egy szabályos dobókockát

- Előzetesen nem tudjuk, mi lesz az eredmény



Valószínűségszámítás

- **Véletlen** eseményeket tanulmányozunk
- Végtelen sokszor, azonos körülmények között megismételhető **kísérletek**
- Egyetlen kísérlet eredménye bizonytalan
- Nagyon sok ismétlés esetén szabályosságok tapasztalhatók

Példa: Feldobunk egy szabályos dobókockát

- Előzetesen nem tudjuk, mi lesz az eredmény
- De ha sokszor feldobjuk, azt tapasztaljuk, hogy az egyes számok relatív gyakorisága $1/6$ körül stabilizálódik



Valószínűesszámitás

- **Véletlen** eseményeket tanulmányozunk
- Végtelen sokszor, azonos körülmények között megismételhető **kísérletek**
- Egyetlen kísérlet eredménye bizonytalan
- Nagyon sok ismétlés esetén szabályosságok tapasztalhatók

Példa: Feldobunk egy szabályos dobókockát

- Előzetesen nem tudjuk, mi lesz az eredmény
- De ha sokszor feldobjuk, azt tapasztaljuk, hogy az egyes számok relatív gyakorisága $1/6$ körül stabilizálódik



Cél: Megérteni a véletlen eseményeknél látható **szabályszerűségeket**

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibások száma			

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibásak száma	$\{0, 1, 2, 3\}$		

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibásak száma	$\{0, 1, 2, 3\}$	pl. pontosan 1 hibás van	

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibásak száma	$\{0, 1, 2, 3\}$	pl. pontosan 1 hibás van	Legfeljebb 1 hibás: $A = \{0, 1\}$

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibásak száma	$\{0, 1, 2, 3\}$	pl. pontosan 1 hibás van	Legfeljebb 1 hibás: $A = \{0, 1\}$
Hegesztési hibák száma egy hídban			

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibásak száma	$\{0, 1, 2, 3\}$	pl. pontosan 1 hibás van	Legfeljebb 1 hibás: $A = \{0, 1\}$
Hegesztési hibák száma egy hídban	$\{0, 1, 2, \dots\}$		

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibásak száma	$\{0, 1, 2, 3\}$	pl. pontosan 1 hibás van	Legfeljebb 1 hibás: $A = \{0, 1\}$
Hegesztési hibák száma egy hídban	$\{0, 1, 2, \dots\}$	pl. 42 hiba	

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibásak száma	$\{0, 1, 2, 3\}$	pl. pontosan 1 hibás van	Legfeljebb 1 hibás: $A = \{0, 1\}$
Hegesztési hibák száma egy hídban	$\{0, 1, 2, \dots\}$	pl. 42 hiba	Legalább 50 hiba: $A = \{50, 51, 52, \dots\}$

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibásak száma	$\{0, 1, 2, 3\}$	pl. pontosan 1 hibás van	Legfeljebb 1 hibás: $A = \{0, 1\}$
Hegesztési hibák száma egy hídban	$\{0, 1, 2, \dots\}$	pl. 42 hiba	Legalább 50 hiba: $A = \{50, 51, 52, \dots\}$
Egy berendezés élettartama			

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibásak száma	$\{0, 1, 2, 3\}$	pl. pontosan 1 hibás van	Legfeljebb 1 hibás: $A = \{0, 1\}$
Hegesztési hibák száma egy hídban	$\{0, 1, 2, \dots\}$	pl. 42 hiba	Legalább 50 hiba: $A = \{50, 51, 52, \dots\}$
Egy berendezés élettartama	$[0, \infty)$		

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibások száma	$\{0, 1, 2, 3\}$	pl. pontosan 1 hibás van	Legfeljebb 1 hibás: $A = \{0, 1\}$
Hegesztési hibák száma egy hídban	$\{0, 1, 2, \dots\}$	pl. 42 hiba	Legalább 50 hiba: $A = \{50, 51, 52, \dots\}$
Egy berendezés élettartama	$[0, \infty)$	pl. 5 év	

Alapfogalmak

Definíció (Eseménytér és részei)

- **Eseménytér (S):** A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza.
- **Elemi események:** A kísérlet lehetséges kimenetelei, azaz S elemei.
- **Esemény:** Az eseménytér egy részhalmaza.

Példák:

Kísérlet	Eseménytér	Elemi esemény	Esemény
3 betonkockából a hibások száma	$\{0, 1, 2, 3\}$	pl. pontosan 1 hibás van	Legfeljebb 1 hibás: $A = \{0, 1\}$
Hegesztési hibák száma egy hídban	$\{0, 1, 2, \dots\}$	pl. 42 hiba	Legalább 50 hiba: $A = \{50, 51, 52, \dots\}$
Egy berendezés élettartama	$[0, \infty)$	pl. 5 év	Garancián kívül: $A = (2, \infty)$

Műveletek eseményekkel

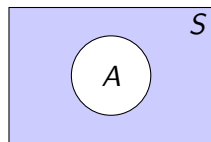
Műveletek eseményekkel

Komplementer

Műveletek eseményekkel

Komplementer:

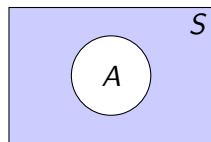
- Az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az A nem



Műveletek eseményekkel

Komplementer:

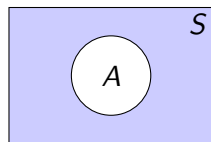
- Az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az A nem
- Jelölés: $\overline{A}$ vagy A^C



Műveletek eseményekkel

Komplementer:

- Az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az A nem
- Jelölés: $\overline{A}$ vagy A^C

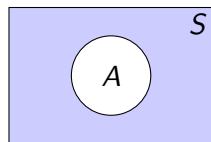


Unió vagy összeg

Műveletek eseményekkel

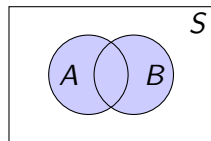
Komplementer:

- Az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az A nem
- Jelölés: $\bar{A}$ vagy A^C



Unió vagy összeg:

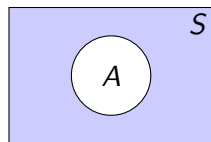
- Legalább az egyik esemény bekövetkezik



Műveletek eseményekkel

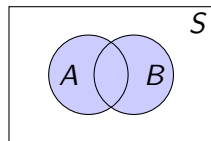
Komplementer:

- Az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az A nem
- Jelölés: $\bar{A}$ vagy A^C



Unió vagy összeg:

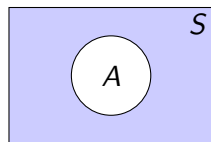
- Legalább az egyik esemény bekövetkezik
- Jelölés: $A \cup B$ vagy $A + B$



Műveletek eseményekkel

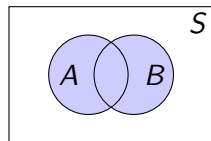
Komplementer:

- Az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az A nem
- Jelölés: $\bar{A}$ vagy A^C



Unió vagy összeg:

- Legalább az egyik esemény bekövetkezik
- Jelölés: $A \cup B$ vagy $A + B$

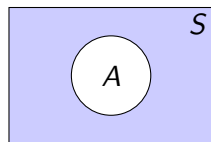


Metszet vagy szorzat

Műveletek eseményekkel

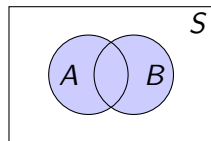
Komplementer:

- Az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az A nem
- Jelölés: $\bar{A}$ vagy A^C



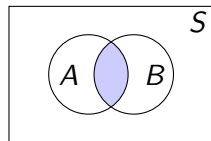
Unió vagy összeg:

- Legalább az egyik esemény bekövetkezik
- Jelölés: $A \cup B$ vagy $A + B$



Metszet vagy szorzat:

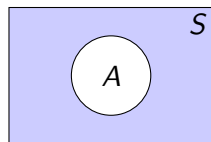
- Mindkét esemény egyidejűleg bekövetkezik



Műveletek eseményekkel

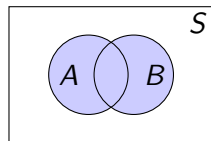
Komplementer:

- Az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az A nem
- Jelölés: $\bar{A}$ vagy A^C



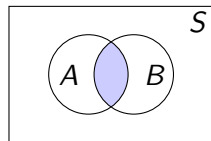
Unió vagy összeg:

- Legalább az egyik esemény bekövetkezik
- Jelölés: $A \cup B$ vagy $A + B$



Metszet vagy szorzat:

- Mindkét esemény egyidejűleg bekövetkezik
- Jelölés: $A \cap B$ vagy $A \cdot B$



Műveletek eseményekkel

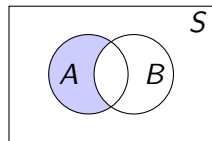
Műveletek eseményekkel

Különbség

Műveletek eseményekkel

Különbség:

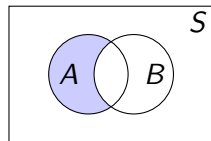
- A bekövetkezik, de B nem



Műveletek eseményekkel

Különbség:

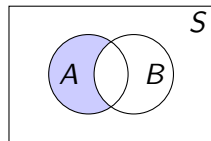
- A bekövetkezik, de B nem
- Jelölés: $A \setminus B$



Műveletek eseményekkel

Különbség:

- A bekövetkezik, de B nem
- Jelölés: $A \setminus B$

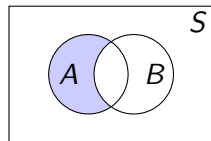


Egymást kizáró események

Műveletek eseményekkel

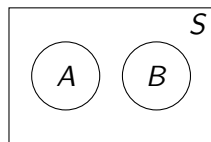
Különbség:

- A bekövetkezik, de B nem
- Jelölés: $A \setminus B$



Egymást kizáró események:

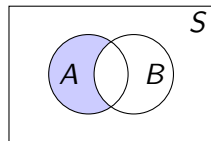
- Egyidejűleg soha nem következhetnek be



Műveletek eseményekkel

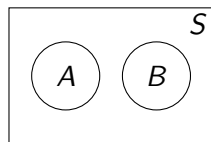
Különbség:

- A bekövetkezik, de B nem
- Jelölés: $A \setminus B$



Egymást kizáró események:

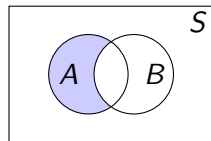
- Egyidejűleg soha nem következhetnek be
- Tehát $A \cap B = \emptyset$



Műveletek eseményekkel

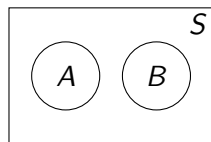
Különbség:

- A bekövetkezik, de B nem
- Jelölés: $A \setminus B$



Egymást kizáró események:

- Egyidejűleg soha nem következhetnek be
- Tehát $A \cap B = \emptyset$

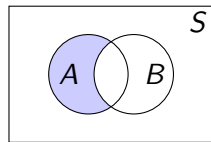


Az A esemény **maga után vonja** B eseményt

Műveletek eseményekkel

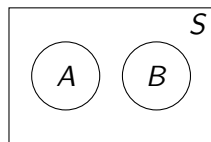
Különbség:

- A bekövetkezik, de B nem
- Jelölés: $A \setminus B$



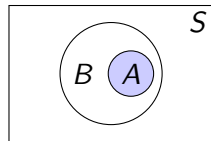
Egymást kizáró események:

- Egyidejűleg soha nem következhetnek be
- Tehát $A \cap B = \emptyset$



Az A esemény **maga után vonja** B eseményt:

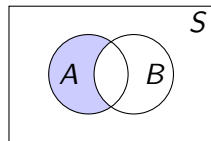
- A bekövetkezése esetén B is bekövetkezik



Műveletek eseményekkel

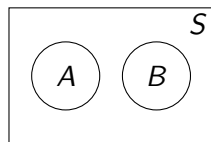
Különbség:

- A bekövetkezik, de B nem
- Jelölés: $A \setminus B$



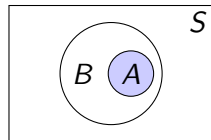
Egymást kizáró események:

- Egyidejűleg soha nem következhetnek be
- Tehát $A \cap B = \emptyset$



Az A esemény **maga után vonja** B eseményt:

- A bekövetkezése esetén B is bekövetkezik
- Jelölés: $A \subseteq B$



Események valószínűsége

Definíció (Valószínűség)

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből

Események valószínűsége

Definíció (Valószínűség)

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság egy számhoz fog tartani

Események valószínűsége

Definíció (Valószínűség)

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűségének**

Események valószínűsége

Definíció (Valószínűség)

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűségének**, amit $\mathbb{P}(A)$ -val jelölünk.

Események valószínűsége

Definíció (Valószínűség)

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűségének**, amit $\mathbb{P}(A)$ -val jelölünk.

Kolmogorov-féle axiómák:

- 1 $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ minden E eseményre

Események valószínűsége

Definíció (Valószínűség)

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűségének**, amit $\mathbb{P}(A)$ -val jelölünk.

Kolmogorov-féle axiómák:

- 1 $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ minden E eseményre
- 2 $\mathbb{P}(S) = 1$, ahol S az eseménytér (a biztos esemény valószínűsége 1)

Események valószínűsége

Definíció (Valószínűség)

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűségének**, amit $\mathbb{P}(A)$ -val jelölünk.

Kolmogorov-féle axiómák:

- 1 $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ minden E eseményre
- 2 $\mathbb{P}(S) = 1$, ahol S az eseménytér (a biztos esemény valószínűsége 1),
 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (a lehetetlen esemény valószínűsége 0)

Események valószínűsége

Definíció (Valószínűség)

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűségének**, amit $\mathbb{P}(A)$ -val jelölünk.

Kolmogorov-féle axiómák:

- 1 $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ minden E eseményre
- 2 $\mathbb{P}(S) = 1$, ahol S az eseménytér (a biztos esemény valószínűsége 1),
 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (a lehetetlen esemény valószínűsége 0)
- 3 Ha $A_1, A_2, \dots$ egymást páronként kizáró események ($A_i \cap A_j = \emptyset$)

Események valószínűsége

Definíció (Valószínűség)

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűségének**, amit $\mathbb{P}(A)$ -val jelölünk.

Kolmogorov-féle axiómák:

- ❶ $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ minden E eseményre
- ❷ $\mathbb{P}(S) = 1$, ahol S az eseménytér (a biztos esemény valószínűsége 1),
 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (a lehetetlen esemény valószínűsége 0)
- ❸ Ha $A_1, A_2, \dots$ egymást páronként kizáró események ($A_i \cap A_j = \emptyset$),
amik uniója A

Események valószínűsége

Definíció (Valószínűség)

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűségének**, amit $\mathbb{P}(A)$ -val jelölünk.

Kolmogorov-féle axiómák:

- ❶ $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ minden E eseményre
- ❷ $\mathbb{P}(S) = 1$, ahol S az eseménytér (a biztos esemény valószínűsége 1),
 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (a lehetetlen esemény valószínűsége 0)
- ❸ Ha $A_1, A_2, \dots$ egymást páronként kizáró események ($A_i \cap A_j = \emptyset$),
 amik uniója A , azaz $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$

Események valószínűsége

Definíció (Valószínűség)

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűségének**, amit $\mathbb{P}(A)$ -val jelölünk.

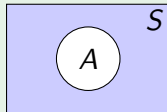
Kolmogorov-féle axiómák:

- ❶ $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ minden E eseményre
- ❷ $\mathbb{P}(S) = 1$, ahol S az eseménytér (a biztos esemény valószínűsége 1), $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (a lehetetlen esemény valószínűsége 0)
- ❸ Ha $A_1, A_2, \dots$ egymást páronként kizáró események ($A_i \cap A_j = \emptyset$), amik uniója A , azaz $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$, akkor A valószínűsége az egyes valószínűségek összege: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots$

A valószínűség alaptulajdonságai

Komplementer esemény

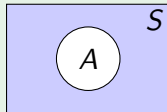
$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$$



A valószínűség alaptulajdonságai

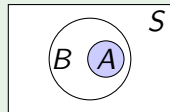
Komplementer esemény

$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$$



Monotonitás

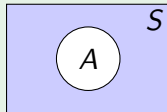
Ha $A \subseteq B$, akkor
 $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$



A valószínűség alaptulajdonságai

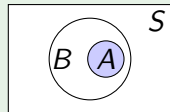
Komplementer esemény

$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$$



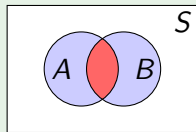
Monotonitás

Ha $A \subseteq B$, akkor
 $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$



Szitaformula

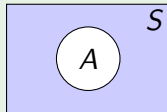
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \\ &\quad - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$



A valószínűség alaptulajdonságai

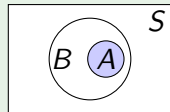
Komplementer esemény

$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$$



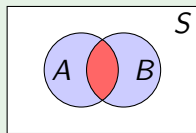
Monotonitás

Ha $A \subseteq B$, akkor
 $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

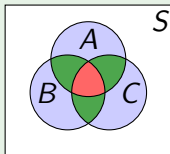


Szitaformula

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$



$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &\quad - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$



A valószínűség alaptulajdonságai

Tétel („Kedvező / összes”)

A valószínűség alaptulajdonságai

Tétel („Kedvező / összes”)

Ha egy kísérletnek **véges sok** kimenetele lehet

A valószínűség alaptulajdonságai

Tétel („Kedvező / összes”)

Ha egy kísérletnek **véges sok** kimenetele lehetséges ezek mind **azonos valószínűséggel** következnek be

A valószínűség alaptulajdonságai

Tétel („Kedvező / összes”)

Ha egy kísérletnek **véges sok** kimenetele lehet és ezek mind **azonos valószínűséggel** következnek be, akkor egy E esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}. \quad (1)$$

A valószínűség alaptulajdonságai

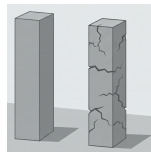
Tétel („Kedvező / összes”)

Ha egy kísérletnek **véges sok** kimenetele lehet és ezek mind **azonos valószínűséggel** következnek be, akkor egy E esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}. \quad (1)$$

Feladat (Vasbeton pillérek)

20 db előregyártott vasbeton pillérből 6 darab sérült.



A valószínűség alaptulajdonságai

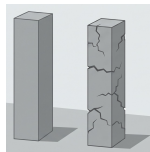
Tétel („Kedvező / összes”)

Ha egy kísérletnek **véges sok** kimenetele lehet és ezek mind **azonos valószínűséggel** következnek be, akkor egy E esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}. \quad (1)$$

Feladat (Vasbeton pillérek)

20 db előregyártott vasbeton pillérből 6 darab sérült. Véletlenszerűen kiválasztunk 3 pillért.



A valószínűség alaptulajdonságai

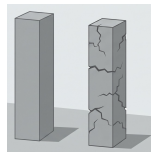
Tétel („Kedvező / összes”)

Ha egy kísérletnek **véges sok** kimenetele lehet és ezek mind **azonos valószínűséggel** következnek be, akkor egy E esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}. \quad (1)$$

Feladat (Vasbeton pillérek)

20 db előregyártott vasbeton pillérből 6 darab sérült. Véletlenszerűen kiválasztunk 3 pillért. Mi a valószínűsége, hogy nincs köztük hibás?



A valószínűség alaptulajdonságai

Tétel („Kedvező / összes”)

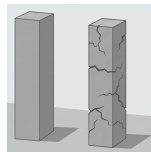
Ha egy kísérletnek **véges sok** kimenetele lehet és ezek mind **azonos valószínűséggel** következnek be, akkor egy E esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}. \quad (1)$$

Feladat (Vasbeton pillérek)

20 db előregyártott vasbeton pillérből 6 darab sérült. Véletlenszerűen kiválasztunk 3 pillért. Mi a valószínűsége, hogy nincs köztük hibás?

Megoldás:



A valószínűség alaptulajdonságai

Tétel („Kedvező / összes”)

Ha egy kísérletnek **véges sok** kimenetele lehet és ezek mind **azonos valószínűséggel** következnek be, akkor egy E esemény valószínűsége:

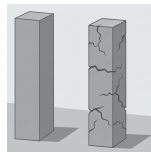
$$\mathbb{P}(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}. \quad (1)$$

Feladat (Vasbeton pillérek)

20 db előregyártott vasbeton pillérből 6 darab sérült. Véletlenszerűen kiválasztunk 3 pillért. Mi a valószínűsége, hogy nincs köztük hibás?

Megoldás:

- Összes eset: 20 pillérből 3-at választunk: $\binom{20}{3} = 1140$



A valószínűség alaptulajdonságai

Tétel („Kedvező / összes”)

Ha egy kísérletnek **véges sok** kimenetele lehet és ezek mind **azonos valószínűséggel** következnek be, akkor egy E esemény valószínűsége:

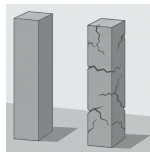
$$\mathbb{P}(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}. \quad (1)$$

Feladat (Vasbeton pillérek)

20 db előregyártott vasbeton pillérből 6 darab sérült. Véletlenszerűen kiválasztunk 3 pillért. Mi a valószínűsége, hogy nincs köztük hibás?

Megoldás:

- Összes eset: 20 pillérből 3-at választunk: $\binom{20}{3} = 1140$
- Kedvező eset: 14 hibátlanból választunk 3-at: $\binom{14}{3} = 364$



A valószínűség alaptulajdonságai

Tétel („Kedvező / összes”)

Ha egy kísérletnek **véges sok** kimenetele lehet és ezek mind **azonos valószínűséggel** következnek be, akkor egy E esemény valószínűsége:

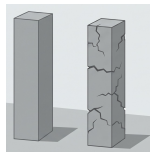
$$\mathbb{P}(E) = \frac{E\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}. \quad (1)$$

Feladat (Vasbeton pillérek)

20 db előregyártott vasbeton pillérből 6 darab sérült. Véletlenszerűen kiválasztunk 3 pillért. Mi a valószínűsége, hogy nincs köztük hibás?

Megoldás:

- Összes eset: 20 pillérből 3-at választunk: $\binom{20}{3} = 1140$
- Kedvező eset: 14 hibátlanból választunk 3-at: $\binom{14}{3} = 364$
- Így a kért valószínűség: $\frac{364}{1140} \approx 0.32$



1 Valószínűségi alapfogalmak

2 Feltételes valószínűség

3 Függetlenség

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyen B egy olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyen B egy olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Az A eseménynek a B eseményre vonatkozó **feltételes valószínűsége** azt fejezi ki, hogy azon eseteknek amikor a B esemény bekövetkezik, hányad részében következik be az A esemény is.

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyen B egy olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Az A eseménynek a B eseményre vonatkozó **feltételes valószínűsége** azt fejezi ki, hogy azon eseteknek amikor a B esemény bekövetkezik, hányad részében következik be az A esemény is.

- Jelölés: $\mathbb{P}(A \mid B)$

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyen B egy olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Az A eseménynek a B eseményre vonatkozó **feltételes valószínűsége** azt fejezi ki, hogy azon eseteknek amikor a B esemény bekövetkezik, hányad részében következik be az A esemény is.

- Jelölés: $\mathbb{P}(A \mid B)$
- Képlet: $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyen B egy olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Az A eseménynek a B eseményre vonatkozó **feltételes valószínűsége** azt fejezi ki, hogy azon eseteknek amikor a B esemény bekövetkezik, hányad részében következik be az A esemény is.

- Jelölés: $\mathbb{P}(A \mid B)$
- Képlet: $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

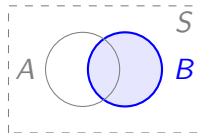
Intuitív jelentés:

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyen B egy olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Az A eseménynek a B eseményre vonatkozó **feltételes valószínűsége** azt fejezi ki, hogy azon eseteknek amikor a B esemény bekövetkezik, hányad részében következik be az A esemény is.

- Jelölés: $\mathbb{P}(A | B)$
- Képlet: $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$



Intuitív jelentés:

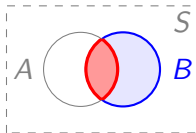
- Ha tudjuk, hogy B megtörtént, akkor az eseményterünk (**az új „összes” esetünk**) a B halmazra szűkül

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyen B egy olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Az A eseménynek a B eseményre vonatkozó **feltételes valószínűsége** azt fejezi ki, hogy azon eseteknek amikor a B esemény bekövetkezik, hányad részében következik be az A esemény is.

- Jelölés: $\mathbb{P}(A | B)$
- Képlet: $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$



Intuitív jelentés:

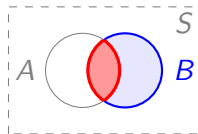
- Ha tudjuk, hogy B megtörtént, akkor az eseményterünk (**az új „összes” esetünk**) a B halmazra szűkül
- Ezen a leszűkített téren belül keressük azokat az eseteket, amikor A is teljesül (**az új „kedvező” esetek**)

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyen B egy olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Az A eseménynek a B eseményre vonatkozó **feltételes valószínűsége** azt fejezi ki, hogy azon eseteknek amikor a B esemény bekövetkezik, hányad részében következik be az A esemény is.

- Jelölés: $\mathbb{P}(A | B)$
- Képlet: $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$



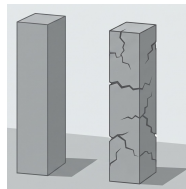
Intuitív jelentés:

- Ha tudjuk, hogy B megtörtént, akkor az eseményterünk (**az új „összes” esetünk**) a B halmazra szűkül
- Ezen a leszűkített téren belül keressük azokat az eseteket, amikor A is teljesül (**az új „kedvező” esetek**), ami pont az $A \cap B$

Feltételes valószínűség: példa

Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak

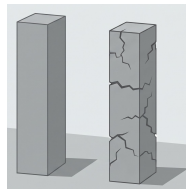


:

Feltételes valószínűség: példa

Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírási teszten.

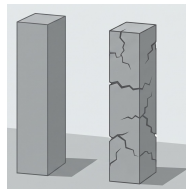


:

Feltételes valószínűség: példa

Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírasi teszten. Ha észreveszünk egy mikrorepedést egy pilléren, mi a valószínűsége, hogy az megbukik a teszten?



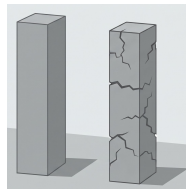
:

Feltételes valószínűség: példa

Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírasi teszten. Ha észreveszünk egy mikrorepedést egy pilléren, mi a valószínűsége, hogy az megbukik a teszten?

Megoldás:



:

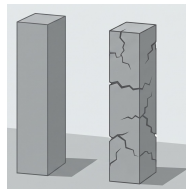
Feltételes valószínűség: példa

Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírasi teszten. Ha észreveszünk egy mikrorepedést egy pilléren, mi a valószínűsége, hogy az megbukik a teszten?

Megoldás:

- B esemény: a pillér mikrorepedéses



:

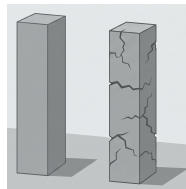
Feltételes valószínűség: példa

Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírási teszten. Ha észreveszünk egy mikrorepedést egy pilléren, mi a valószínűsége, hogy az megbukik a teszten?

Megoldás:

- B esemény: a pillér mikrorepedéses
- A esemény: a pillér megbukik a teherbírási teszten



:

Feltételes valószínűség: példa

Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

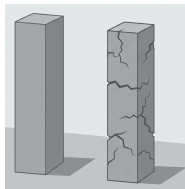
100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírási teszten. Ha észreveszünk egy mikrorepedést egy pilléren, mi a valószínűsége, hogy az megbukik a teszten?

Megoldás:

- B esemény: a pillér mikrorepedéses
- A esemény: a pillér megbukik a teherbírási teszten
- Ekkor:

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

:



Feltételes valószínűség: példa

Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

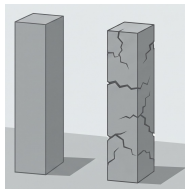
100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírási teszten. Ha észreveszünk egy mikrorepedést egy pilléren, mi a valószínűsége, hogy az megbukik a teszten?

Megoldás:

- B esemény: a pillér mikrorepedéses
- A esemény: a pillér megbukik a teherbírási teszten
- Ekkor:

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{20}{100}}$$

:



Feltételes valószínűség: példa

Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

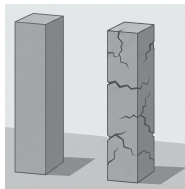
100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírási teszten. Ha észreveszünk egy mikrorepedést egy pilléren, mi a valószínűsége, hogy az megbukik a teszten?

Megoldás:

- B esemény: a pillér mikrorepedéses
- A esemény: a pillér megbukik a teherbírási teszten
- Ekkor:

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{15}{20}$$

:



Feltételes valószínűség: példa

Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

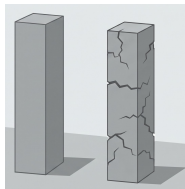
100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírási teszten. Ha észreveszünk egy mikrorepedést egy pilléren, mi a valószínűsége, hogy az megbukik a teszten?

Megoldás:

- B esemény: a pillér mikrorepedéses
- A esemény: a pillér megbukik a teherbírási teszten
- Ekkor:

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{15}{20} = 0.75$$

:



Feltételes valószínűség: példa

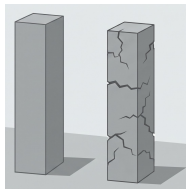
Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírási teszten. Ha észreveszünk egy mikrorepedést egy pilléren, mi a valószínűsége, hogy az megbukik a teszten?

Megoldás:

- B esemény: a pillér mikrorepedéses
- A esemény: a pillér megbukik a teherbírási teszten
- Ekkor:

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{15}{20} = 0.75$$



Megjegyzés: A 100-zal való osztás egyszerűsödik:

Feltételes valószínűség: példa

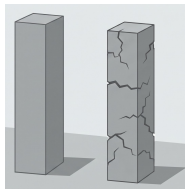
Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírési teszten. Ha észreveszünk egy mikrorepedést egy pilléren, mi a valószínűsége, hogy az megbukik a teszten?

Megoldás:

- B esemény: a pillér mikrorepedéses
- A esemény: a pillér megbukik a teherbírési teszten
- Ekkor:

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{15}{20} = 0.75$$



Megjegyzés: A 100-zal való osztás egyszerűsödik:

- az új "összes eset" csak a 20 db repedéses pillér

Feltételes valószínűség: példa

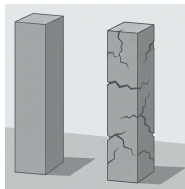
Feladat (Vasbeton pillérek minőségellenőrzése)

100 db vasbeton pillér közül 20 olyan van, amin mikrorepedések vannak és közülük 15 megbukik a teherbírási teszten. Ha észreveszünk egy mikrorepedést egy pilléren, mi a valószínűsége, hogy az megbukik a teszten?

Megoldás:

- B esemény: a pillér mikrorepedéses
- A esemény: a pillér megbukik a teherbírási teszten
- Ekkor:

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{15}{20} = 0.75$$



Megjegyzés: A 100-zal való osztás egyszerűsödik:

- az új "összes eset" csak a 20 db repedéses pillér
- az új "kedvező eset" csak az a 15 db, ami repedt és megbukik

Szorzási szabály

Tétel (Szorzási szabály)

Tetszőleges $E_1, E_2, \dots, E_n$ események esetén a metszetük valószínűsége a következőképpen számolható:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2 | E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3 | E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}). \quad (2)$$

Szorzási szabály

Tétel (Szorzási szabály)

Tetszőleges $E_1, E_2, \dots, E_n$ események esetén a metszetük valószínűsége a következőképpen számolható:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2 | E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3 | E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}). \quad (2)$$

Intuitív jelentés:

Szorzási szabály

Tétel (Szorzási szabály)

Tetszőleges $E_1, E_2, \dots, E_n$ események esetén a metszetük valószínűsége a következőképpen számolható:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2 | E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3 | E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}). \quad (2)$$

Intuitív jelentés: Hogyan történik meg több dolog egyszerre?

Szorzási szabály

Tétel (Szorzási szabály)

Tetszőleges $E_1, E_2, \dots, E_n$ események esetén a metszetük valószínűsége a következőképpen számolható:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2 | E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3 | E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}). \quad (2)$$

Intuitív jelentés: Hogyan történik meg több dolog egyszerre?

- Először meg kell történnie E_1 -nek

Szorzási szabály

Tétel (Szorzási szabály)

Tetszőleges $E_1, E_2, \dots, E_n$ események esetén a metszetük valószínűsége a következőképpen számolható:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2 | E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3 | E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}). \quad (2)$$

Intuitív jelentés: Hogyan történik meg több dolog egyszerre?

- Először meg kell történnie E_1 -nek
- Utána, feltételezve, hogy E_1 megtörtént, be kell következnie E_2 -nek is

Szorzási szabály

Tétel (Szorzási szabály)

Tetszőleges $E_1, E_2, \dots, E_n$ események esetén a metszetük valószínűsége a következőképpen számolható:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2 | E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3 | E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}). \quad (2)$$

Intuitív jelentés: Hogyan történik meg több dolog egyszerre?

- Először meg kell történnie E_1 -nek
- Utána, feltételezve, hogy E_1 megtörtént, be kell következnie E_2 -nek is
- Utána, feltételezve, hogy E_1 és E_2 is megtörtént, be kell következnie E_3 -nak is

Szorzási szabály

Tétel (Szorzási szabály)

Tetszőleges $E_1, E_2, \dots, E_n$ események esetén a metszetük valószínűsége a következőképpen számolható:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2 | E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3 | E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}). \quad (2)$$

Intuitív jelentés: Hogyan történik meg több dolog egyszerre?

- Először meg kell történnie E_1 -nek
- Utána, feltételezve, hogy E_1 megtörtént, be kell következnie E_2 -nek is
- Utána, feltételezve, hogy E_1 és E_2 is megtörtént, be kell következnie E_3 -nak is... és így tovább

Szorzási szabály

Tétel (Szorzási szabály)

Tetszőleges $E_1, E_2, \dots, E_n$ események esetén a metszetük valószínűsége a következőképpen számolható:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2 | E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3 | E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}). \quad (2)$$

Intuitív jelentés: Hogyan történik meg több dolog egyszerre?

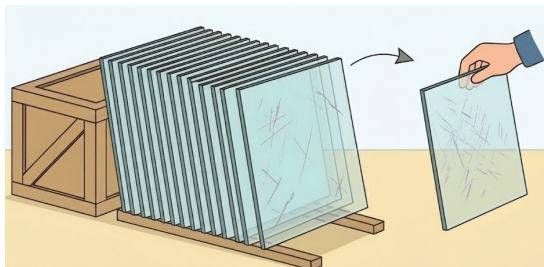
- Először meg kell történnie E_1 -nek
- Utána, feltételezve, hogy E_1 megtörtént, be kell következnie E_2 -nek is
- Utána, feltételezve, hogy E_1 és E_2 is megtörtént, be kell következnie E_3 -nak is... és így tovább

Klasszikus alkalmazás: visszatevés nélküli mintavétel

Szorzási szabály: példa

Feladat (Üvegtáblák ellenőrzése)

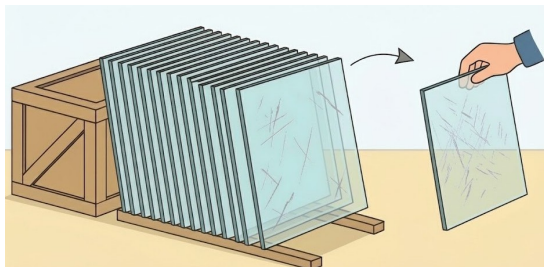
Egy irodaház építéséhez 15 darab egyedi méretű homlokzati üvegtábla érkezik.



Szorzási szabály: példa

Feladat (Üvegtáblák ellenőrzése)

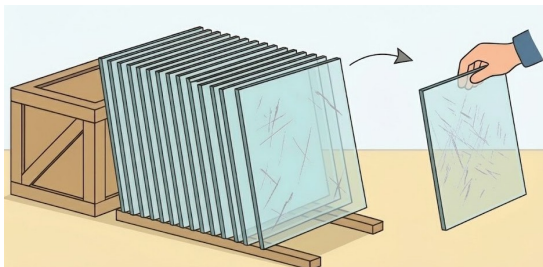
Egy irodaház építéséhez 15 darab egyedi méretű homlokzati üvegtábla érkezik. A szállítmányból 10 darab ép, 5 darabon viszont apró szállítási karcok vannak.



Szorzási szabály: példa

Feladat (Üvegtáblák ellenőrzése)

Egy irodaház építéséhez 15 darab egyedi méretű homlokzati üvegtábla érkezik. A szállítmányból 10 darab ép, 5 darabon viszont apró szállítási karcok vannak. A műszaki ellenőr véletlenszerűen kiválaszt 3 táblát egymás után, visszatevés nélkül.

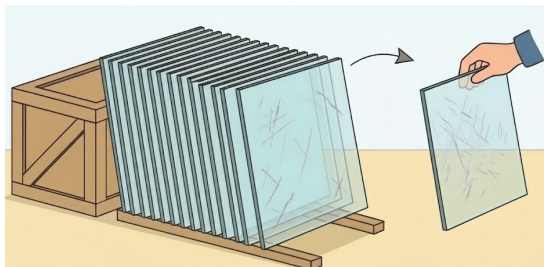


Szorzási szabály: példa

Feladat (Üvegtáblák ellenőrzése)

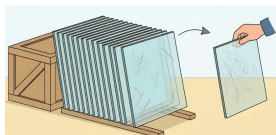
Egy irodaház építéséhez 15 darab egyedi méretű homlokzati üvegtábla érkezik. A szállítmányból 10 darab ép, 5 darabon viszont apró szállítási karcok vannak. A műszaki ellenőr véletlenszerűen kiválaszt 3 táblát egymás után, visszatevés nélkül.

Mi a valószínűsége, hogy mind a három megvizsgált üvegtábla ép lesz?



Szorzási szabály: példa

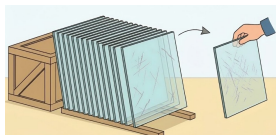
Megoldás:



Szorzási szabály: példa

Megoldás:

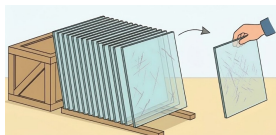
- A_i esemény: az i -edikként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)



Szorzási szabály: példa

Megoldás:

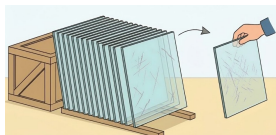
- A_i esemény: az i -edikként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)
- Ekkor a kérdés: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$



Szorzási szabály: példa

Megoldás:

- A_i esemény: az i -edikként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)
- Ekkor a kérdés: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
 $\Rightarrow$ ezt **szorzási szabállyal** határozzuk meg

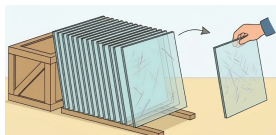


Szorzási szabály: példa

Megoldás:

- A_i esemény: az i -edikként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)
- Ekkor a kérdés: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
 $\Rightarrow$ ezt **szorzási szabállyal** határozzuk meg:

- 1 Annak valószínűsége, hogy az első ép: $\mathbb{P}(A_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

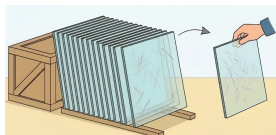


Szorzási szabály: példa

Megoldás:

- A_i esemény: az i -edikként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)
- Ekkor a kérdés: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
 $\Rightarrow$ ezt **szorzási szabállyal** határozzuk meg:

- 1 Annak valószínűsége, hogy az első ép: $\mathbb{P}(A_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
- 2 Ha az első ép volt, 14 tábla maradt, amiből 9 ép



Szorzási szabály: példa

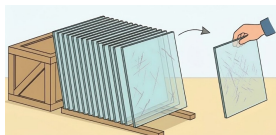
Megoldás:

- A_i esemény: az i -edikként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)

- Ekkor a kérdés: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$\Rightarrow$ ezt **szorzási szabállyal** határozzuk meg:

- 1 Annak valószínűsége, hogy az első ép: $\mathbb{P}(A_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
- 2 Ha az első ép volt, 14 tábla maradt, amiből 9 ép, így $\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{9}{14}$



Szorzási szabály: példa

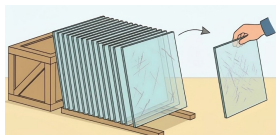
Megoldás:

- A_i esemény: az i -edikként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)

- Ekkor a kérdés: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$\Rightarrow$ ezt **szorzási szabállyal** határozzuk meg:

- 1 Annak valószínűsége, hogy az első ép: $\mathbb{P}(A_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
- 2 Ha az első ép volt, 14 tábla maradt, amiből 9 ép, így $\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{9}{14}$
- 3 Ha az első kettő ép volt, 13 tábla maradt, amiből 8 ép



Szorzási szabály: példa

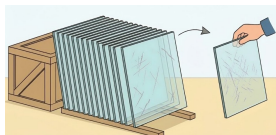
Megoldás:

- A_i esemény: az i -edikként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)

- Ekkor a kérdés: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$\Rightarrow$ ezt **szorzási szabállyal** határozzuk meg:

- 1 Annak valószínűsége, hogy az első ép: $\mathbb{P}(A_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
- 2 Ha az első ép volt, 14 tábla maradt, amiből 9 ép, így $\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{9}{14}$
- 3 Ha az első kettő ép volt, 13 tábla maradt, amiből 8 ép, így
 $\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{8}{13}$



Szorzási szabály: példa

Megoldás:

- A_i esemény: az i -edikként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)

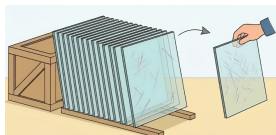
- Ekkor a kérdés: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

⇒ ezt **szorzási szabállyal** határozzuk meg:

- 1 Annak valószínűsége, hogy az első ép: $\mathbb{P}(A_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
- 2 Ha az első ép volt, 14 tábla maradt, amiből 9 ép, így $\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{9}{14}$
- 3 Ha az első kettő ép volt, 13 tábla maradt, amiből 8 ép, így
 $\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{8}{13}$

- Vagyis a szorzási szabály alapján:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)$$



Szorzási szabály: példa

Megoldás:

- A_i esemény: az i -edikként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)

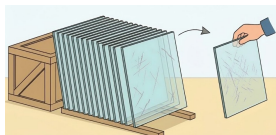
- Ekkor a kérdés: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

⇒ ezt **szorzási szabállyal** határozzuk meg:

- 1 Annak valószínűsége, hogy az első ép: $\mathbb{P}(A_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
- 2 Ha az első ép volt, 14 tábla maradt, amiből 9 ép, így $\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{9}{14}$
- 3 Ha az első kettő ép volt, 13 tábla maradt, amiből 8 ép, így
 $\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{8}{13}$

- Vagyis a szorzási szabály alapján:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13}\end{aligned}$$



Szorzási szabály: példa

Megoldás:

- A_i esemény: az i -ediként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)

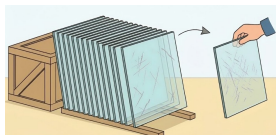
- Ekkor a kérdés: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

⇒ ezt **szorzási szabállyal** határozzuk meg:

- 1 Annak valószínűsége, hogy az első ép: $\mathbb{P}(A_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
- 2 Ha az első ép volt, 14 tábla maradt, amiből 9 ép, így $\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{9}{14}$
- 3 Ha az első kettő ép volt, 13 tábla maradt, amiből 8 ép, így
 $\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{8}{13}$

- Vagyis a szorzási szabály alapján:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{24}{91}\end{aligned}$$



Szorzási szabály: példa

Megoldás:

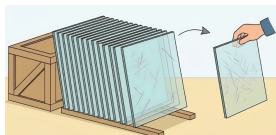
- A_i esemény: az i -edikként vizsgált üvegtábla ép ($i = 1, 2, 3$)

- Ekkor a kérdés: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
 $\Rightarrow$ ezt **szorzási szabállyal** határozzuk meg:

- 1 Annak valószínűsége, hogy az első ép: $\mathbb{P}(A_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
- 2 Ha az első ép volt, 14 tábla maradt, amiből 9 ép, így $\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{9}{14}$
- 3 Ha az első kettő ép volt, 13 tábla maradt, amiből 8 ép, így
 $\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{8}{13}$

- Vagyis a szorzási szabály alapján:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{24}{91} \approx 26.4\%\end{aligned}$$



Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha:

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha:

- páronként kizárják egymást: $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha:

- páronként kizárják egymást: $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re, és
- az uniójuk a biztos esemény: $B_1 \cup B_2 \cup \dots = S$.

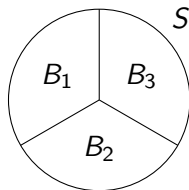
Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha:

- páronként kizárják egymást: $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re, és
- az uniójuk a biztos esemény: $B_1 \cup B_2 \cup \dots = S$.

- Ez az eseménytér **partíciója**



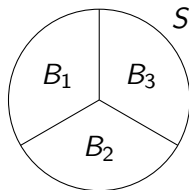
Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha:

- páronként kizárják egymást: $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re, és
- az uniójuk a biztos esemény: $B_1 \cup B_2 \cup \dots = S$.

- Ez az eseménytér **partíciója**
- Az eseménytér minden eleme **pontosan egy** B_i -ben van benne



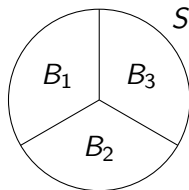
Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha:

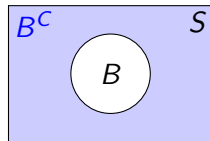
- páronként kizárják egymást: $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re, és
- az uniójuk a biztos esemény: $B_1 \cup B_2 \cup \dots = S$.

- Ez az eseménytér **partíciója**
- Az eseménytér minden eleme **pontosan egy** B_i -ben van benne



Példa:

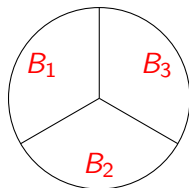
Tetszőleges B esemény esetén B és B^C egy teljes eseményrendszert alkot



Teljes valószínűség tétele

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Tegyük fel, hogy a B_1 , B_2 , $\dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak.

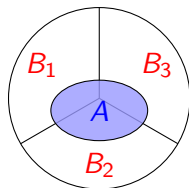


Teljes valószínűség tétele

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A esemény valószínűsége a következőképpen bontható fel:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A | B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \dots = \sum_i \mathbb{P}(A | B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i). \quad (3)$$



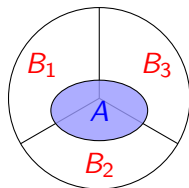
Teljes valószínűség tétele

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A esemény valószínűsége a következőképpen bontható fel:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A | B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \dots = \sum_i \mathbb{P}(A | B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i). \quad (3)$$

Intuitív jelentés:



Teljes valószínűség tétele

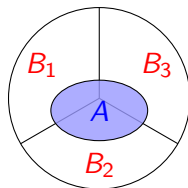
Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A esemény valószínűsége a következőképpen bontható fel:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A | B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \dots = \sum_i \mathbb{P}(A | B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i). \quad (3)$$

Intuitív jelentés:

- Az A esemény többféle módon (különböző B_i esetekben) következhet be



Teljes valószínűség tétele

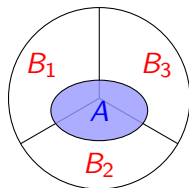
Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A esemény valószínűsége a következőképpen bontható fel:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A | B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \dots = \sum_i \mathbb{P}(A | B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i). \quad (3)$$

Intuitív jelentés:

- Az A esemény többféle módon (különböző B_i esetekben) következhet be
- Az A valószínűségét megkaphatjuk úgy, hogy megnézzük A (feltételes) valószínűségét a különböző esetekben, és ezeket **súlyozottan összeadjuk**



Teljes valószínűség tétele

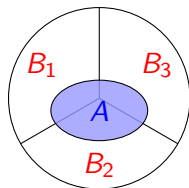
Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A esemény valószínűsége a következőképpen bontható fel:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A | B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \dots = \sum_i \mathbb{P}(A | B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i). \quad (3)$$

Intuitív jelentés:

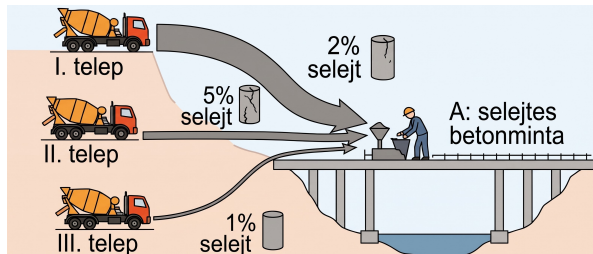
- Az A esemény többféle módon (különböző B_i esetekben) következhet be
- Az A valószínűségét megkaphatjuk úgy, hogy megnézzük A (feltételes) valószínűségét a különböző esetekben, és ezeket **súlyozottan összeadjuk**
- A súlyok a különböző esetek (B_i) **előfordulási esélyei**



Teljes valószínűség tétele: példa

Feladat (Betonminta)

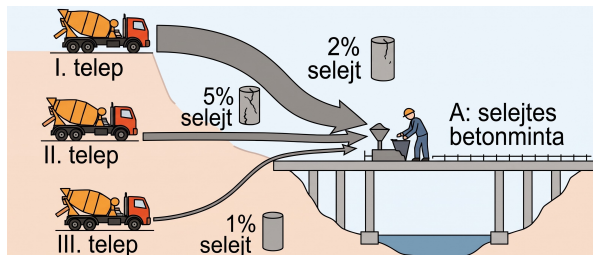
Egy hídépítéshez három betonkeverő telepről szállítják a betont.



Teljes valószínűség tétele: példa

Feladat (Betonminta)

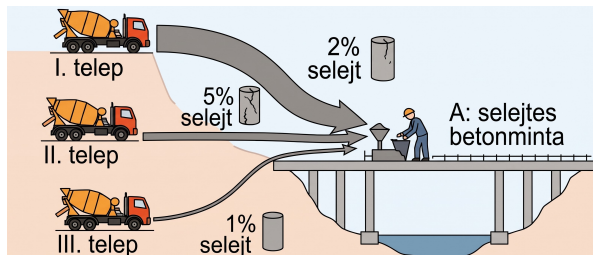
Egy hídépítéshez három betonkeverő telepről szállítják a betont. A teljes mennyiség 50%-a az I. telepről, 30%-a a II. telepről, 20%-a a III. telepről érkezik.



Teljes valószínűség tétele: példa

Feladat (Betonminta)

Egy hídépítéshez három betonkeverő telepről szállítják a betont. A teljes mennyiség 50%-a az I. telepről, 30%-a a II. telepről, 20%-a a III. telepről érkezik. Tudjuk, hogy a gyenge nyomószilárdságú (selejtes) keverék aránya a telepeknél rendre 2%, 5% és 1%.

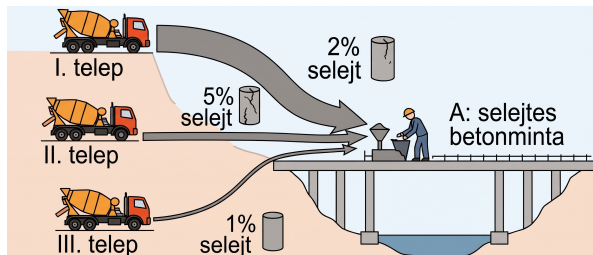


Teljes valószínűség tétele: példa

Feladat (Betonminta)

Egy hídépítéshez három betonkeverő telepről szállítják a betont. A teljes mennyiség 50%-a az I. telepről, 30%-a a II. telepről, 20%-a a III. telepről érkezik. Tudjuk, hogy a gyenge nyomószilárdságú (selejtes) keverék aránya a telepeknél rendre 2%, 5% és 1%.

Mi a valószínűsége, hogy az építkezésen szűrőpróbaszerűen vett betonminta selejtes lesz?



Teljes valószínűség tétele: példa

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Teljes valószínűség tétele: példa

Megoldás:

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Teljes valószínűség tétele: példa

Megoldás:

- B_i esemény: a minta az i -edik telepről származik ($i = 1, 2, 3$)

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Teljes valószínűség tétele: példa

Megoldás:

- B_i esemény: a minta az i -edik telepről származik ($i = 1, 2, 3$)
 - B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Teljes valószínűség tétele: példa

Megoldás:

- B_i esemény: a minta az i -edik telepről származik ($i = 1, 2, 3$)
 - B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer
 - $\mathbb{P}(B_1) = 0.5$, $\mathbb{P}(B_2) = 0.3$, $\mathbb{P}(B_3) = 0.2$

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Teljes valószínűség tétele: példa

Megoldás:

- B_i esemény: a minta az i -edik telepről származik ($i = 1, 2, 3$)
 - B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer
 - $\mathbb{P}(B_1) = 0.5$, $\mathbb{P}(B_2) = 0.3$, $\mathbb{P}(B_3) = 0.2$
- A esemény: a vizsgált minta selejtes

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Teljes valószínűség tétele: példa

Megoldás:

- B_i esemény: a minta az i -edik telepről származik ($i = 1, 2, 3$)
 - B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer
 - $\mathbb{P}(B_1) = 0.5$, $\mathbb{P}(B_2) = 0.3$, $\mathbb{P}(B_3) = 0.2$
- A esemény: a vizsgált minta selejtes
- A feltételes valószínűségek:

$$\mathbb{P}(A | B_1) = 0.02, \quad \mathbb{P}(A | B_2) = 0.05, \quad \mathbb{P}(A | B_3) = 0.01$$

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Teljes valószínűség tétele: példa

Megoldás:

- B_i esemény: a minta az i -edik telepről származik ($i = 1, 2, 3$)
 - B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer
 - $\mathbb{P}(B_1) = 0.5$, $\mathbb{P}(B_2) = 0.3$, $\mathbb{P}(B_3) = 0.2$
- A esemény: a vizsgált minta selejtes
- A feltételes valószínűségek:

$$\mathbb{P}(A | B_1) = 0.02, \quad \mathbb{P}(A | B_2) = 0.05, \quad \mathbb{P}(A | B_3) = 0.01$$

- Így a **teljes valószínűség tétele** alapján

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Teljes valószínűség tétele: példa

Megoldás:

- B_i esemény: a minta az i -edik telepről származik ($i = 1, 2, 3$)
 - B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer
 - $\mathbb{P}(B_1) = 0.5, \mathbb{P}(B_2) = 0.3, \mathbb{P}(B_3) = 0.2$
- A esemény: a vizsgált minta selejtes
- A feltételes valószínűségek:

$$\mathbb{P}(A | B_1) = 0.02, \quad \mathbb{P}(A | B_2) = 0.05, \quad \mathbb{P}(A | B_3) = 0.01$$

- Így a **teljes valószínűség tétele** alapján:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A | B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A | B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3)$$

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Teljes valószínűség tétele: példa

Megoldás:

- B_i esemény: a minta az i -edik telepről származik ($i = 1, 2, 3$)
 - B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer
 - $\mathbb{P}(B_1) = 0.5, \mathbb{P}(B_2) = 0.3, \mathbb{P}(B_3) = 0.2$
- A esemény: a vizsgált minta selejtes
- A feltételes valószínűségek:

$$\mathbb{P}(A | B_1) = 0.02, \quad \mathbb{P}(A | B_2) = 0.05, \quad \mathbb{P}(A | B_3) = 0.01$$

- Így a **teljes valószínűség tétele** alapján:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A | B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A | B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A | B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) \\ &= 0.02 \cdot 0.5 + 0.05 \cdot 0.3 + 0.01 \cdot 0.2 \end{aligned}$$

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Teljes valószínűség tétele: példa

Megoldás:

- B_i esemény: a minta az i -edik telepről származik ($i = 1, 2, 3$)
 - B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer
 - $\mathbb{P}(B_1) = 0.5$, $\mathbb{P}(B_2) = 0.3$, $\mathbb{P}(B_3) = 0.2$
- A esemény: a vizsgált minta selejtes
- A feltételes valószínűségek:

$$\mathbb{P}(A | B_1) = 0.02, \quad \mathbb{P}(A | B_2) = 0.05, \quad \mathbb{P}(A | B_3) = 0.01$$

- Így a **teljes valószínűség tétele** alapján:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A | B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A | B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A | B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) \\ &= 0.02 \cdot 0.5 + 0.05 \cdot 0.3 + 0.01 \cdot 0.2 = 0.027 \end{aligned}$$

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Teljes valószínűség tétele: példa

Megoldás:

- B_i esemény: a minta az i -edik telepről származik ($i = 1, 2, 3$)
 - B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer
 - $\mathbb{P}(B_1) = 0.5, \mathbb{P}(B_2) = 0.3, \mathbb{P}(B_3) = 0.2$
- A esemény: a vizsgált minta selejtes
- A feltételes valószínűségek:

$$\mathbb{P}(A | B_1) = 0.02, \quad \mathbb{P}(A | B_2) = 0.05, \quad \mathbb{P}(A | B_3) = 0.01$$

- Így a **teljes valószínűség tétele** alapján:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A | B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A | B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A | B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) \\ &= 0.02 \cdot 0.5 + 0.05 \cdot 0.3 + 0.01 \cdot 0.2 = 0.027 \end{aligned}$$

Tehát a minta 2.7% valószínűséggel lesz selejtes

A feladat adatai:

Telep	Arány	Selejt
I.	50%	2%
II.	30%	5%
III.	20%	1%

Bayes-tétel

Tétel (Bayes-tétel)



Bayes-tétel

Tétel (Bayes-tétel)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak.



Bayes-tétel

Tétel (Bayes-tétel)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A eseményre és minden k -ra érvényes a következő összefüggés:

$$\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A | B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A | B_i)}. \quad (4)$$



Bayes-tétel

Tétel (Bayes-tétel)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A eseményre és minden k -ra érvényes a következő összefüggés:

$$\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A | B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A | B_i)}. \quad (4)$$

- A számláló $\mathbb{P}(A \cap B_k)$



Bayes-tétel

Tétel (Bayes-tétel)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A eseményre és minden k -ra érvényes a következő összefüggés:

$$\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A | B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A | B_i)}. \quad (4)$$



- A számláló $\mathbb{P}(A \cap B_k)$
- A nevező (a teljes valószínűség tétele alapján) éppen $\mathbb{P}(A)$

Bayes-tétel

Tétel (Bayes-tétel)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A eseményre és minden k -ra érvényes a következő összefüggés:

$$\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A | B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A | B_i)}. \quad (4)$$



- A számláló $\mathbb{P}(A \cap B_k)$
 - A nevező (a teljes valószínűség tétele alapján) éppen $\mathbb{P}(A)$
- } Így (4) valójában a $\frac{\mathbb{P}(A \cap B_k)}{\mathbb{P}(A)}$ definíciót fejezi ki

Bayes-tétel

Tétel (Bayes-tétel)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A eseményre és minden k -ra érvényes a következő összefüggés:

$$\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A | B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A | B_i)}. \quad (4)$$



- A számláló $\mathbb{P}(A \cap B_k)$
 - A nevező (a teljes valószínűség tétele alapján) éppen $\mathbb{P}(A)$
- Így (4) valójában a $\frac{\mathbb{P}(A \cap B_k)}{\mathbb{P}(A)}$ definíciót fejezi ki

Megjegyzés: Bayes-tétel „megfordítja” a gondolkodást

Bayes-tétel

Tétel (Bayes-tétel)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A eseményre és minden k -ra érvényes a következő összefüggés:

$$\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A | B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A | B_i)}. \quad (4)$$



- A számláló $\mathbb{P}(A \cap B_k)$
 - A nevező (a teljes valószínűség tétele alapján) éppen $\mathbb{P}(A)$
- Így (4) valójában a $\frac{\mathbb{P}(A \cap B_k)}{\mathbb{P}(A)}$ definíciót fejezi ki

Megjegyzés: Bayes-tétel „megfordítja” a gondolkodást

- Általában a **megfigyelés** valószínűségét tudjuk az egyes **esetekben**

Bayes-tétel

Tétel (Bayes-tétel)

Tegyük fel, hogy a $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Ekkor tetszőleges A eseményre és minden k -ra érvényes a következő összefüggés:

$$\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A | B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A | B_i)}. \quad (4)$$



- A számláló $\mathbb{P}(A \cap B_k)$
 - A nevező (a teljes valószínűség tétele alapján) éppen $\mathbb{P}(A)$
- Így (4) valójában a $\frac{\mathbb{P}(A \cap B_k)}{\mathbb{P}(A)}$ definíciót fejezi ki

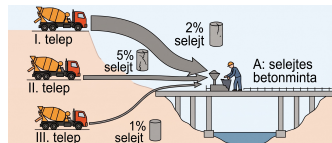
Megjegyzés: Bayes-tétel „megfordítja” a gondolkodást

- Általában a **megfigyelés** valószínűségét tudjuk az egyes **esetekben**
- A Bayes-tétel a **megfigyelésből** következtet vissza az **esetre**

Bayes-tétel: példa

Feladat (Selejtes betonminta)

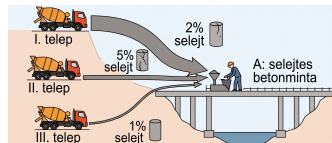
Térjünk vissza az előző feladathoz!



Bayes-tétel: példa

Feladat (Selejtes betonminta)

Térjünk vissza az előző feladathoz! A laboratóriumi vizsgálat kimutatta, hogy a kiválasztott betonminta valóban selejtes.

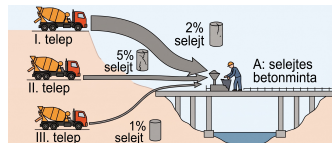


Bayes-tétel: példa

Feladat (Selejtes betonminta)

Térjünk vissza az előző feladathoz! A laboratóriumi vizsgálat kimutatta, hogy a kiválasztott betonminta valóban selejtes.

Mi a valószínűsége annak, hogy ez a hibás keverék a II. telepről érkezett?



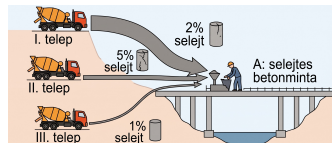
Bayes-tétel: példa

Feladat (Selejtes betonminta)

Térjünk vissza az előző feladathoz! A laboratóriumi vizsgálat kimutatta, hogy a kiválasztott betonminta valóban selejtes.

Mi a valószínűsége annak, hogy ez a hibás keverék a II. telepről érkezett?

Megoldás:



Bayes-tétel: példa

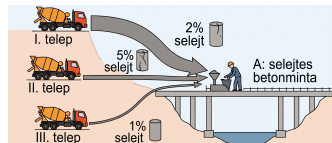
Feladat (Selejtes betonminta)

Térjünk vissza az előző feladathoz! A laboratóriumi vizsgálat kimutatta, hogy a kiválasztott betonminta valóban selejtes.

Mi a valószínűsége annak, hogy ez a hibás keverék a II. telepről érkezett?

Megoldás:

- A: a minta selejtes



Bayes-tétel: példa

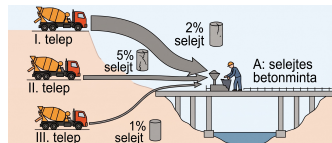
Feladat (Selejtes betonminta)

Térjünk vissza az előző feladathoz! A laboratóriumi vizsgálat kimutatta, hogy a kiválasztott betonminta valóban selejtes.

Mi a valószínűsége annak, hogy ez a hibás keverék a II. telepről érkezett?

Megoldás:

- A : a minta selejtes
- B_2 : a minta a II. telepről származik



Bayes-tétel: példa

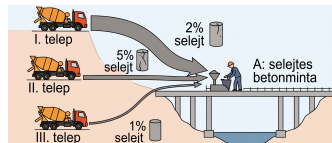
Feladat (Selejtes betonminta)

Térjünk vissza az előző feladathoz! A laboratóriumi vizsgálat kimutatta, hogy a kiválasztott betonminta valóban selejtes.

Mi a valószínűsége annak, hogy ez a hibás keverék a II. telepről érkezett?

Megoldás:

- A : a minta selejtes
- B_2 : a minta a II. telepről származik
- Kérdés: $\mathbb{P}(B_2 | A) = ?$



Bayes-tétel: példa

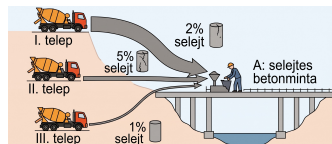
Feladat (Selejtes betonminta)

Térjünk vissza az előző feladathoz! A laboratóriumi vizsgálat kimutatta, hogy a kiválasztott betonminta valóban selejtes.

Mi a valószínűsége annak, hogy ez a hibás keverék a II. telepről érkezett?

Megoldás:

- A : a minta selejtes
- B_2 : a minta a II. telepről származik
- Kérdés: $\mathbb{P}(B_2 | A) = ?$
- Már tudjuk: $\mathbb{P}(B_2) = 0.3$, $\mathbb{P}(A | B_2) = 0.05$, $\mathbb{P}(A) = 0.027$



Bayes-tétel: példa

Feladat (Selejtes betonminta)

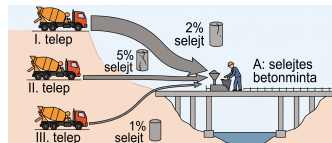
Térjünk vissza az előző feladathoz! A laboratóriumi vizsgálat kimutatta, hogy a kiválasztott betonminta valóban selejtes.

Mi a valószínűsége annak, hogy ez a hibás keverék a II. telepről érkezett?

Megoldás:

- A : a minta selejtes
- B_2 : a minta a II. telepről származik
- Kérdés: $\mathbb{P}(B_2 | A) = ?$
- Már tudjuk: $\mathbb{P}(B_2) = 0.3$, $\mathbb{P}(A | B_2) = 0.05$, $\mathbb{P}(A) = 0.027$
- Így Bayes-tétel alapján:

$$\mathbb{P}(B_2 | A) = \frac{\mathbb{P}(B_2) \cdot \mathbb{P}(A | B_2)}{\mathbb{P}(A)}$$



Bayes-tétel: példa

Feladat (Selejtes betonminta)

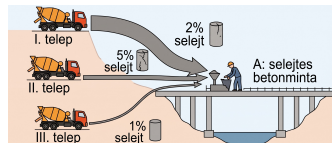
Térjünk vissza az előző feladathoz! A laboratóriumi vizsgálat kimutatta, hogy a kiválasztott betonminta valóban selejtes.

Mi a valószínűsége annak, hogy ez a hibás keverék a II. telepről érkezett?

Megoldás:

- A : a minta selejtes
- B_2 : a minta a II. telepről származik
- Kérdés: $\mathbb{P}(B_2 | A) = ?$
- Már tudjuk: $\mathbb{P}(B_2) = 0.3$, $\mathbb{P}(A | B_2) = 0.05$, $\mathbb{P}(A) = 0.027$
- Így Bayes-tétel alapján:

$$\mathbb{P}(B_2 | A) = \frac{\mathbb{P}(B_2) \cdot \mathbb{P}(A | B_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.05}{0.027}$$



Bayes-tétel: példa

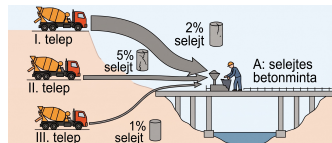
Feladat (Selejtes betonminta)

Térjünk vissza az előző feladathoz! A laboratóriumi vizsgálat kimutatta, hogy a kiválasztott betonminta valóban selejtes.

Mi a valószínűsége annak, hogy ez a hibás keverék a II. telepről érkezett?

Megoldás:

- A : a minta selejtes
- B_2 : a minta a II. telepről származik
- Kérdés: $\mathbb{P}(B_2 | A) = ?$
- Már tudjuk: $\mathbb{P}(B_2) = 0.3$, $\mathbb{P}(A | B_2) = 0.05$, $\mathbb{P}(A) = 0.027$
- Így Bayes-tétel alapján:



$$\mathbb{P}(B_2 | A) = \frac{\mathbb{P}(B_2) \cdot \mathbb{P}(A | B_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.05}{0.027} = \frac{5}{9} \approx 55.6\%$$

- 1 Valószínűségi alapfogalmak
- 2 Feltételes valószínűség
- 3 Függetlenség**

Események függetlensége

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Legyen A és B események, amelyekre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$.

Események függetlensége

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Legyen A és B események, amelyekre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Ekkor A és B **függetlenek**, ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C)$.

Események függetlensége

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Legyen A és B események, amelyekre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Ekkor A és B **függetlenek**, ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C)$.

Megjegyzés: Ha $\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$, akkor A és B mindig független

Események függetlensége

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Legyen A és B események, amelyekre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Ekkor A és B **függetlenek**, ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C)$.

Megjegyzés: Ha $\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$, akkor A és B mindig független

Intuitív jelentés:

Események függetlensége

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Legyen A és B események, amelyekre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Ekkor A és B **függetlenek**, ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C)$.

Megjegyzés: Ha $\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$, akkor A és B mindig független

Intuitív jelentés: Két esemény független, ha az egyik bekövetkezése **semmilyen új információt nem ad** a másik bekövetkezésének esélyéről

Események függetlensége

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Legyen A és B események, amelyekre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Ekkor A és B **függetlenek**, ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C)$.

Megjegyzés: Ha $\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$, akkor A és B mindig független

Intuitív jelentés: Két esemény független, ha az egyik bekövetkezése **semmilyen új információt nem ad** a másik bekövetkezésének esélyéről

Tétel (Függetlenség = szorzattá bonthatóság)

Az A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Események függetlensége

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Legyen A és B események, amelyekre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Ekkor A és B **függetlenek**, ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C)$.

Megjegyzés: Ha $\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$, akkor A és B mindig független

Intuitív jelentés: Két esemény független, ha az egyik bekövetkezése **semmilyen új információt nem ad** a másik bekövetkezésének esélyéről

Tétel (Függetlenség = szorzattá bonthatóság)

Az A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Megjegyzés: Független $\neq$ egymást kizáró

Események függetlensége

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Legyen A és B események, amelyekre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Ekkor A és B **függetlenek**, ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C)$.

Megjegyzés: Ha $\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$, akkor A és B mindig független

Intuitív jelentés: Két esemény független, ha az egyik bekövetkezése **semmilyen új információt nem ad** a másik bekövetkezésének esélyéről

Tétel (Függetlenség = szorzattá bonthatóság)

Az A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Megjegyzés: Független $\neq$ egymást kizáró

- Ha két esemény **kizárja egymást** ($A \cap B = \emptyset$) és előfordulhatnak, akkor **sosem függetlenek**

Több esemény függetlensége

Ha már 3 (vagy több) eseményünk van, a függetlenség fogalma bonyolultabbá válik

Több esemény függetlensége

Ha már 3 (vagy több) eseményünk van, a függetlenség fogalma bonyolultabbá válik:

Definíció (Teljes függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **teljesen (együttesen) függetlenek**, ha az események közül bármely k darabot kiválasztva ($2 \leq k \leq n$), a metszetük valószínűsége megegyezik a valószínűségeik szorzatával.

Több esemény függetlensége

Ha már 3 (vagy több) eseményünk van, a függetlenség fogalma bonyolultabbá válik:

Definíció (Teljes függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **teljesen (együttesen) függetlenek**, ha az események közül bármely k darabot kiválasztva ($2 \leq k \leq n$), a metszetük valószínűsége megegyezik a valószínűségeik szorzatával.

Megjegyzés: Ez erősebb, mint a páronkénti függetlenség

Több esemény függetlensége

Ha már 3 (vagy több) eseményünk van, a függetlenség fogalma bonyolultabbá válik:

Definíció (Teljes függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **teljesen (együttesen) függetlenek**, ha az események közül bármely k darabot kiválasztva ($2 \leq k \leq n$), a metszetük valószínűsége megegyezik a valószínűségeik szorzatával.

Megjegyzés: Ez erősebb, mint a páronkénti függetlenség

Példa: 3 esemény (A, B, C) esetén 4 feltételnek kell egyszerre teljesülnie

Több esemény függetlensége

Ha már 3 (vagy több) eseményünk van, a függetlenség fogalma bonyolultabbá válik:

Definíció (Teljes függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **teljesen (együttesen) függetlenek**, ha az események közül bármely k darabot kiválasztva ($2 \leq k \leq n$), a metszetük valószínűsége megegyezik a valószínűségeik szorzatával.

Megjegyzés: Ez erősebb, mint a páronkénti függetlenség

Példa: 3 esemény (A, B, C) esetén 4 feltételnek kell egyszerre teljesülnie:

❶ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Több esemény függetlensége

Ha már 3 (vagy több) eseményünk van, a függetlenség fogalma bonyolultabbá válik:

Definíció (Teljes függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **teljesen (együttesen) függetlenek**, ha az események közül bármely k darabot kiválasztva ($2 \leq k \leq n$), a metszetük valószínűsége megegyezik a valószínűségeik szorzatával.

Megjegyzés: Ez erősebb, mint a páronkénti függetlenség

Példa: 3 esemény (A, B, C) esetén 4 feltételnek kell egyszerre teljesülnie:

① $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

② $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$

Több esemény függetlensége

Ha már 3 (vagy több) eseményünk van, a függetlenség fogalma bonyolultabbá válik:

Definíció (Teljes függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **teljesen (együttesen) függetlenek**, ha az események közül bármely k darabot kiválasztva ($2 \leq k \leq n$), a metszetük valószínűsége megegyezik a valószínűségeik szorzatával.

Megjegyzés: Ez erősebb, mint a páronkénti függetlenség

Példa: 3 esemény (A, B, C) esetén 4 feltételnek kell egyszerre teljesülnie:

- ① $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
- ② $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$
- ③ $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$

Több esemény függetlensége

Ha már 3 (vagy több) eseményünk van, a függetlenség fogalma bonyolultabbá válik:

Definíció (Teljes függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **teljesen (együttesen) függetlenek**, ha az események közül bármely k darabot kiválasztva ($2 \leq k \leq n$), a metszetük valószínűsége megegyezik a valószínűségeik szorzatával.

Megjegyzés: Ez erősebb, mint a páronkénti függetlenség

Példa: 3 esemény (A, B, C) esetén 4 feltételnek kell egyszerre teljesülnie:

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ \textcircled{2} \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \\ \textcircled{3} \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{páronkénti} \\ \text{függetlenség} \end{array}$$

Több esemény függetlensége

Ha már 3 (vagy több) eseményünk van, a függetlenség fogalma bonyolultabbá válik:

Definíció (Teljes függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **teljesen (együttesen) függetlenek**, ha az események közül bármely k darabot kiválasztva ($2 \leq k \leq n$), a metszetük valószínűsége megegyezik a valószínűségeik szorzatával.

Megjegyzés: Ez erősebb, mint a páronkénti függetlenség

Példa: 3 esemény (A, B, C) esetén 4 feltételnek kell egyszerre teljesülnie:

$$\left. \begin{array}{l}
 \textcircled{1} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\
 \textcircled{2} \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \\
 \textcircled{3} \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)
 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{páronkénti} \\ \text{függetlenség} \end{array}$$

$$\textcircled{4} \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

Függetlenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak.

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Függetlenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Függetlenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

Függelenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró

Függelenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Függetlenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Páronként:**

Függetlenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Páronként:** Csak az #1 recept fagyálló és szilárd

Függetlenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Páronként:** Csak az #1 recept fagyálló és szilárd $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Függelenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Páronként:** Csak az #1 recept fagyálló és szilárd $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Függelenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Páronként:** Csak az #1 recept fagyálló és szilárd $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A, B$ **függetlenek**

Függetlenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Páronként:** Csak az #1 recept fagyálló és szilárd
 $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A, B$ **függetlenek**
 Hasonlóan B, C és A, C is függetlenek

Függelenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Páronként:** Csak az #1 recept fagyálló és szilárd
 $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A, B$ **függetlenek**
 Hasonlóan B, C és A, C is függetlenek
- Együttesen:**

Függetlenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Páronként:** Csak az #1 recept fagyálló és szilárd
 $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A, B$ **függetlenek**
 Hasonlóan B, C és A, C is függetlenek
- Együttesen:** $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$

Függetlenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Páronként:** Csak az #1 recept fagyálló és szilárd
 $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A, B$ **függetlenek**
 Hasonlóan B, C és A, C is függetlenek
- Együttesen:** $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$

Függetlenség: példa

Feladat (Beton receptúrák)

A jobb oldali táblázatban négy, egyenlő eséllyel választott beton-receptúra tulajdonságai láthatóak. Mit lehet mondani a vizsgált tulajdonságok függetlenségéről?

Recept	Fagyálló	Szilárd	Vízzáró
#1	Igen	Igen	Nem
#2	Igen	Nem	Igen
#3	Nem	Igen	Igen
#4	Nem	Nem	Nem

Megoldás:

- Jelölje A , B és C rendre azt az eseményt, hogy a beton fagyálló, szilárd, illetve vízzáró $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- Páronként:** Csak az #1 recept fagyálló és szilárd
 $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A, B$ **függetlenek**
 Hasonlóan B, C és A, C is függetlenek
- Együttesen:** $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$

Konklúzió: A 3 tulajdonság **páronként független**, de **együttesen nem**

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- 1 Klasszikus valószínűségi mező

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- ① Klasszikus valószínűségi mező
 - Eseménytér

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- 1 Klasszikus valószínűségi mező
 - Eseménytér, események

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- 1 Klasszikus valószínűségi mező
 - Eseménytér, események, műveletek

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- 1 Klasszikus valószínűségi mező
 - Eseménytér, események, műveletek
 - Valószínűség fogalma

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- 1 Klasszikus valószínűségi mező
 - Eseménytér, események, műveletek
 - Valószínűség fogalma, axiómák

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- ① Klasszikus valószínűségi mező
 - Eseménytér, események, műveletek
 - Valószínűség fogalma, axiómák, alaptulajdonságok

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- ① Klasszikus valószínűségi mező
 - Eseménytér, események, műveletek
 - Valószínűség fogalma, axiómák, alaptulajdonságok
- ② Feltételes valószínűség: $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- ① Klasszikus valószínűségi mező
 - Eseménytér, események, műveletek
 - Valószínűség fogalma, axiómák, alaptulajdonságok
- ② Feltételes valószínűség: $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
 - Szorzási szabály: $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \prod_i \mathbb{P}(E_i | E_1 \cap \dots \cap E_{i-1})$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

① Klasszikus valószínűségi mező

- Eseménytér, események, műveletek
- Valószínűség fogalma, axiómák, alaptulajdonságok

② Feltételes valószínűség: $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

- Szorzási szabály: $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \prod_i \mathbb{P}(E_i | E_1 \cap \dots \cap E_{i-1})$
- Teljes valószínűség tétele: $\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A | B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1 Klasszikus valószínűségi mező

- Eseménytér, események, műveletek
- Valószínűség fogalma, axiómák, alaptulajdonságok

2 Feltételes valószínűség: $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

- Szorzási szabály: $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \prod_i \mathbb{P}(E_i | E_1 \cap \dots \cap E_{i-1})$
- Teljes valószínűség tétele: $\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A | B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$
- Bayes-tétel: $\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A | B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A | B_i)}$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

- ① Klasszikus valószínűségi mező
 - Eseménytér, események, műveletek
 - Valószínűség fogalma, axiómák, alaptulajdonságok
- ② Feltételes valószínűség: $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
 - Szorzási szabály: $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \prod_i \mathbb{P}(E_i | E_1 \cap \dots \cap E_{i-1})$
 - Teljes valószínűség tétele: $\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A | B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$
 - Bayes-tétel: $\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A | B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A | B_i)}$
- ③ Függetlenség: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Köszönöm a figyelmet!