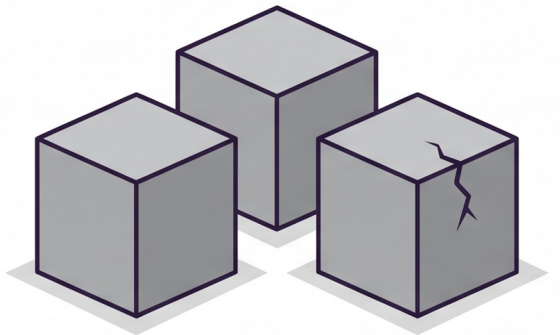
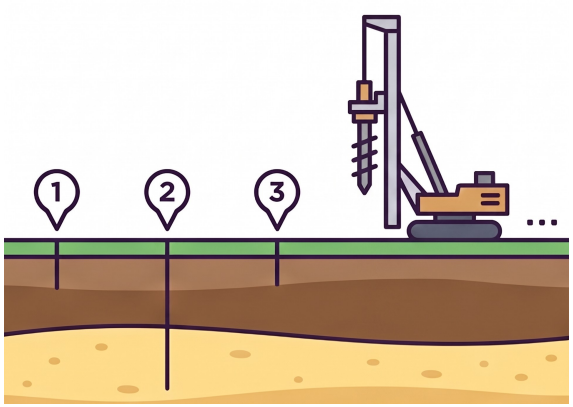
Matematika A3 építőmérnököknek 5. előadás

Diszkrét valószínűségi változók

Szőke Márton

2026. november 2.





1. Valószínűségi változók
2. Diszkrét valószínűségi változók
3. Nevezetes diszkrét eloszlások

1 Valószínűségi változók

2 Diszkrét valószínűségi változók

3 Nevezetes diszkrét eloszlások

Valószínűségi változók

Egy véletlen kísérlet kimeneteleit sokszor számokkal szeretnénk leírni

Példa: Feldobunk két dobókockát

- Egy lehetséges kimenetel: $(3, 6)$
- Ezt többféle számmal is jellemezhetjük:
  - Legyen X az első dobás eredménye: most $X = 3$
  - Legyen Y a két dobás összege: most $Y = 9$
  - Legyen $Z = 1$, ha dobtunk hatost, $Z = 0$, ha nem: most $Z = 1$



A fenti X, Y és Z véletlen mennyiségeket valószínűségi változóknak nevezzük

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy **valószínűségi változó** (a továbbiakban röviden: *valváltozó*) olyan függvény, amely a véletlen kísérlet minden lehetséges kimeneteléhez egy valós számot rendel.

Valószínűségi változók osztályozása

Definíció (Diszkrét és folytonos valváltozók)

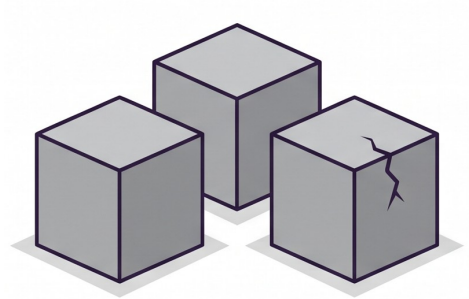
Egy valváltozó **diszkrét**, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok különböző értéket vehet fel.
Egy **folytonos** valváltozó egy adott intervallumon belül bármilyen értéket felvehet, a lehetséges értékeinek a száma megszámlálhatatlanul végtelen.

Megjegyzés:

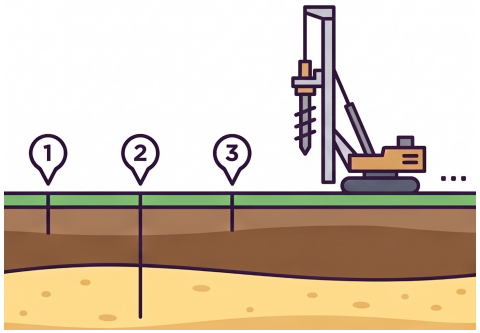
- **Megszámlálhatóan** végtelen halmaz: az elemei felsorolhatók úgy hogy mindegyik kapjon egy sorszámot
  - Például: természetes számok, egész számok
- **Megszámlálhatatlanul** végtelen halmaz: elemeit nem lehet felsorolni
  - Például: valós számok, egy intervallum (pl. $[0, 1]$) pontjai
- A folytonos valváltozókat a következő előadáson definiáljuk precízen
- Léteznek **kevert** valváltozók is, amik nem diszkrétek és nem is folytonosak (ezekkel részletesebben nem foglalkozunk)

Példák valószínűségi változókra

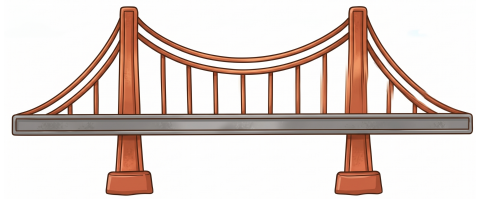
1. Megvizsgálunk 3 db betonkockát
   - X = a nem megfelelő kockák száma
   - Lehetséges értékek: 0, 1, 2, 3
   - Véges $\Rightarrow$ X egy **diszkrét** valváltozó



2. Talajmechanikai próbafúrásokat végzünk
   - Y = hányadik fúrásra találunk megfelelő talajt
   - Lehetséges értékek: 1, 2, 3, ...
   - Megszámlálhatóan végtelen
     $\Rightarrow$ Y egy **diszkrét** valváltozó



3. Egy híd acélszerkezetét vizsgáljuk
   - Z = a szerkezet pontos élettartama
   - Lehetséges értékek: $[0, \infty)$
   - Megszámlálhatatlanul végtelen
     $\Rightarrow$ Z egy **folytonos** valváltozó



Függetlenség

Emlékeztető: A és B események függetlenek, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Hogyan terjeszthető ez ki valószínűségi változókra?

Definíció (Független valváltozók)

Azt mondjuk, hogy az X és Y valószínűségi változók **függetlenek**, ha minden $A, B \subseteq \mathbb{R}$ halmazra az $\{X \in A\}$ és az $\{Y \in B\}$ események függetlenek.

Intuitívan: X értékének ismerete semmilyen információt nem ad Y értékére vonatkozóan, és fordítva

Példák:

- **Független:** $X =$ az első dobókocka eredménye,
  $Y =$ a második dobókocka eredménye
- **Nem független:** $X =$ a Duna vízállása ma,
  $Y =$ a Duna vízállása holnap

1 Valószínűségi változók

2 Diszkrét valószínűségi változók

3 Nevezetes diszkrét eloszlások

Súlyfüggvény

Definíció (Súlyfüggvény)

Egy X diszkrét valváltozó **súlyfüggvénye** az a p_X függvény, amely minden lehetséges x_i értékhez hozzárendeli annak valószínűségét, vagyis

$$p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i), \tag{1}$$

ahol $x_1, x_2, \ldots$ az X változó lehetséges értékei.

Tulajdonságok:

- Nemnegatív: $p_X(x_i) \geqslant 0$ minden x_i esetén
- Az összes lehetőségre összegezve 1-et kapunk: $\sum_i p_X(x_i) = 1$

Példa: Legyen X egy szabályos dobókocka esetén a dobás eredménye

- Ekkor X súlyfüggvénye:

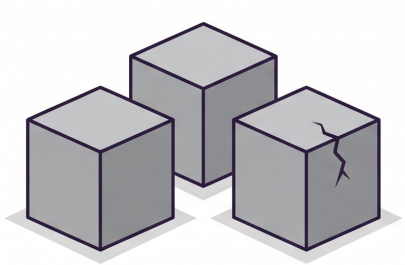
$$p_X(1) = \tfrac{1}{6}, \quad p_X(2) = \tfrac{1}{6}, \quad p_X(3) = \tfrac{1}{6},$$
$$p_X(4) = \tfrac{1}{6}, \quad p_X(5) = \tfrac{1}{6}, \quad p_X(6) = \tfrac{1}{6}$$



Súlyfüggvény: példa

Feladat (Betonkockák)

Legyen 3 db betonkockából a nem megfelelőek száma X. Tudjuk, hogy a kockák egymástól függetlenül 0.9 valószínűséggel megfelelőek. Adjuk meg X súlyfüggvényét!

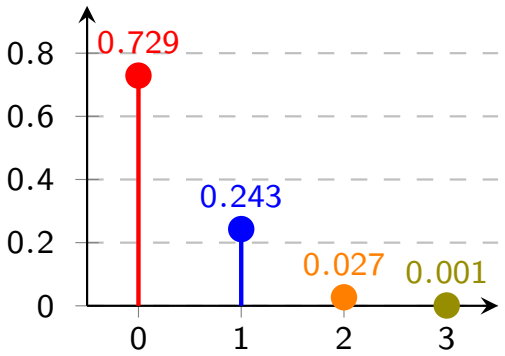


Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy

- mindegyik kocka megfelelő ($X = 0$): $0.9^3 = 0.729$
- pontosan két kocka megfelelő ($X = 1$): $3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.243$
- pontosan egy kocka megfelelő ($X = 2$): $3 \cdot 0.9 \cdot 0.1^2 = 0.027$
- nincs megfelelő kocka ($X = 3$): $0.1^3 = 0.001$

Így X **súlyfüggvénye**:

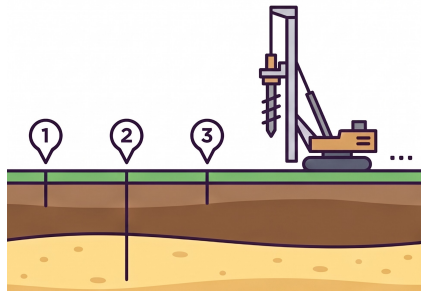
$$p_X(0) = 0.729, \qquad p_X(1) = 0.243,$$
$$p_X(2) = 0.027, \qquad p_X(3) = 0.001$$



Súlyfüggvény: példa

Feladat (Talajfúrás)

Jelölje Y, hogy hányadik fúrásra találunk megfelelő talajt. Minden fúrásnál a többitől függetlenül 0.3 valószínűséggel járunk sikerrel. Adjuk meg Y súlyfüggvényét!



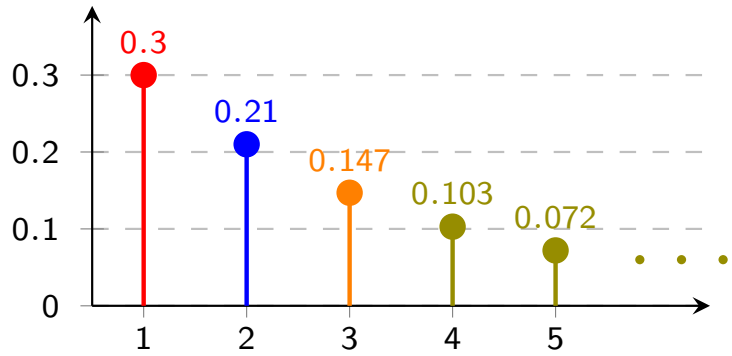
Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első sikeres próbálkozás

- az 1. fúrás ($Y = 1$): 0.3
- a 2. fúrás ($Y = 2$): $0.7 \cdot 0.3 = 0.21$
- a 3. fúrás ($Y = 3$): $0.7^2 \cdot 0.3 = 0.147$ . . . és így tovább
- a k. fúrás ($Y = k$, ahol k tetszőleges pozitív egész): $0.7^{k-1} \cdot 0.3$

Így Y **súlyfüggvénye**:

$$p_Y(1) = 0.3, \qquad p_Y(2) = 0.21,$$

$$p_Y(3) = 0.147, \qquad p_Y(k) = 0.7^{k-1} \cdot 0.3$$



Várható érték

Definíció (Várható érték)

Legyenek egy X diszkrét valváltozó lehetséges értékei x_1, x_2, ... és p_X a súlyfüggvénye. Ekkor X **várható értéke**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i). \tag{2}$$

Megjegyzés:

- A lehetséges értékeknek a súlyfüggvénnyel súlyozott átlaga
- Sok, független megfigyelés átlaga a várható érték körül stabilizálódik (precízebben a 7. előadáson: nagy számok törvénye)

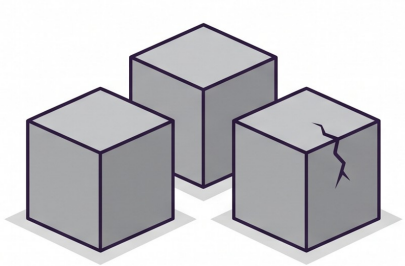
Tulajdonságai:

- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ minden a, b konstans esetén
- Ha X és Y **függetlenek**, akkor $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(X^2) = \sum_i {x_i}^2 \cdot p_X(x_i)$, sőt általában $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i) \cdot p_X(x_i)$

Várható érték: példa

Feladat (Betonkockák)

Legyen 3 db betonkockából a nem megfelelőek száma X. Tudjuk, hogy a kockák egymástól függetlenül 0.9 valószínűséggel megfelelőek. Adjuk meg X várható értékét!



Megoldás: A 10. dián láttuk, hogy X súlyfüggvénye:

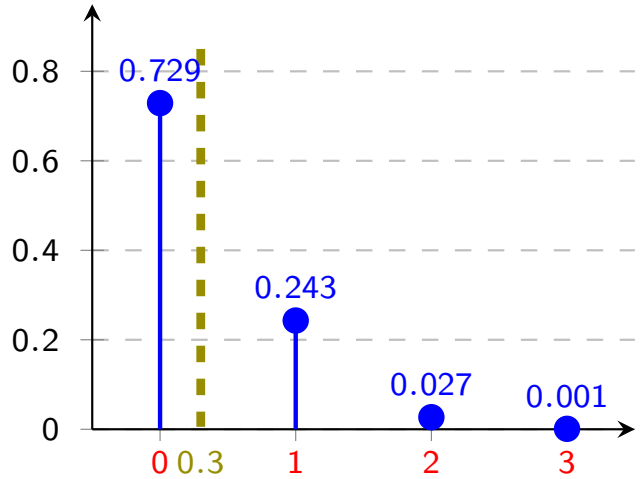
$$p_X(0) = 0.729, \quad p_X(1) = 0.243, \quad p_X(2) = 0.027, \quad p_X(3) = 0.001$$

Így X **várható értéke** definíció alapján:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{3} k \cdot p_X(k) =$$

$$0 \cdot 0.729 + 1 \cdot 0.243 +$$

$$2 \cdot 0.027 + 3 \cdot 0.001 = 0.3$$



Megjegyzés: A várható érték nem feltétlenül egy lehetséges érték

Szórásnégyzet

Definíció (Szórásnégyzet, szórás)

Egy X valószínűségi változó **szórásnégyzete** (vagy varianciája) a várható értékétől való eltérés négyzetének súlyozott átlaga, azaz

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]. \tag{3}$$

A **szórás** a szórásnégyzet nemnegatív gyöke, azaz $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Megjegyzés:

- Azt mutatják, hogy mennyire szóródnak szét az adatok az átlag körül
- Szórásnégyzetre a $\mathbb{D}^2(X)$ jelölést is használjuk

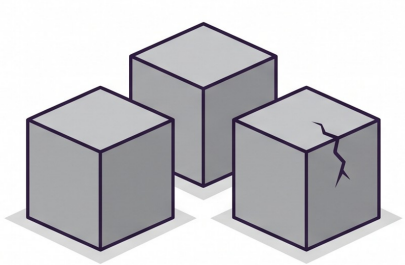
Tulajdonságai:

- A (3)-ból levezethető egy könnyebben használható formula:
  $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \quad \Rightarrow \quad$ feladatokban ezt használjuk
- $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$ minden a, b konstans esetén
- Ha X és Y **független**: $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Szórásnégyzet: példa

Feladat (Betonkockák)

Legyen 3 db betonkockából a nem megfelelőek száma X. Tudjuk, hogy a kockák egymástól függetlenül 0.9 valószínűséggel megfelelőek. Adjuk meg X szórását!



Megoldás:

1. A $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ formulát használjuk
2. A 13. dián már kiszámoltuk, hogy $\mathbb{E}(X) = 0.3$
3. $\mathbb{E}(X^2)$-hez a 10. dián kiszámolt súlyfüggvényt használhatjuk:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 \cdot p_X(k) =$$

$$0^2 \cdot 0.729 + 1^2 \cdot 0.243 + 2^2 \cdot 0.027 + 3^2 \cdot 0.001 = 0.36$$

4. Így: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 0.27$ és $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \approx 0.52$

1 Valószínűségi változók

2 Diszkrét valószínűségi változók

3 Nevezetes diszkrét eloszlások

Nevezetes diszkrét eloszlások

- A gyakorlatban bizonyos típusú véletlen jelenségek újra és újra előfordulnak
- Ezek leírására **nevezetes eloszlásokat** használunk
- Jól ismert tulajdonságaik segítségével sok problémát egyszerűbben leírhatunk és elemezhetünk

A mai előadáson az alábbiakkal foglalkozunk:

1. **Bernoulli:** egy kísérlet kimenetele
2. **Binomiális:** n kísérletből a sikerek száma
3. **Poisson:** adott idő- vagy térintervallumban bekövetkező események száma
4. **Geometriai:** az első sikerig eltelt kísérletek száma

Bernoulli-eloszlás

Definíció (Bernoulli-eloszlás)

Egy X valváltozó **Bernoulli-eloszlású**, ha a lehetséges értékei 0 és 1.
Egy Bernoulli-eloszlás **paramétere** p, ha p valószínűséggel veszi fel az 1 értékét (vagyis $1-p$ valószínűséggel veszi fel a 0 értéket).

- Jelölés: $X \sim \mathrm{BER}(p)$ (azaz X valváltozó $\mathrm{BER}(p)$ eloszlású)
- Egy p valószínűséggel „sikeres” kísérlet eredményét jellemzi:
  - $X = 1$, ha siker (siker alatt nem feltétlenül pozitív dolgot értünk)
  - $X = 0$, ha kudarc

Példa:

1. $X = \begin{cases} 1, & \text{ha szabályos dobókockával 6-ost dobok} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X \sim \mathrm{BER}\left(\frac{1}{6}\right)$
2. $Y = \begin{cases} 1, & \text{ha egy véletlenül választott betonkocka } \textbf{nem} \text{ megfelelő} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Y \sim \mathrm{BER}(0.1),$

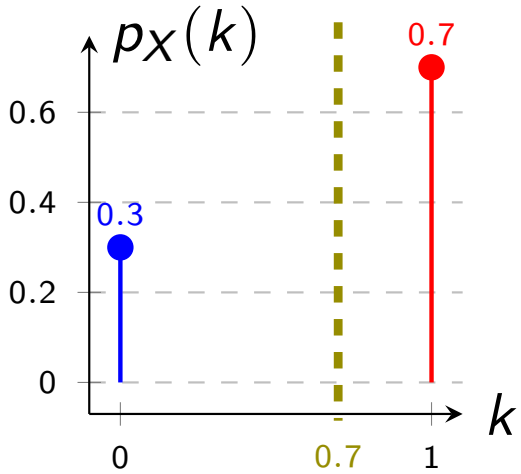
   ha 0.9 annak a valószínűsége, hogy egy kocka megfelelő

Bernoulli-eloszlás: tulajdonságok

Legyen $X \sim \mathrm{BER}(p)$

- **Súlyfüggvény:** $p_X(0) = 1 - p, \quad p_X(1) = p$

  Példa: $p = 0.7$ esetén:



- **Várható érték:** $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p,$
- **Szórásnégyzet:** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p),$
  ahol $=$ lépésnél azt használtuk, hogy

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p$$

- **Szórás:** $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{p(1 - p)}$

Binomiális eloszlás

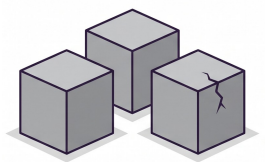
Definíció (Binomiális eloszlás)

Egy kísérletet n-szer végzünk el egymástól függetlenül, ahol a siker valószínűsége p. Ha X jelöli a **sikeres kísérletek számát**, akkor X eloszlása **binomiális** n és p paraméterekkel.

- Jelölés: $X \sim \mathrm{BIN}(n, p)$ vagy $X \sim \mathrm{B}(n, p)$
- Lehetséges értékei: $0, 1, \ldots, n$
- $\mathrm{BIN}(1, p)$ eloszlás megegyezik $\mathrm{BER}(p)$ eloszlással
- n darab független $\mathrm{BER}(p)$ eloszlású valváltozó összege $\mathrm{BIN}(n, p)$ eloszlású

Példa:

1. Ha X a 10. dián definiált változó (3 betonkockából a nem megfelelőek száma) $\Rightarrow$ $X \sim \mathrm{BIN}(3, 0.1)$



2. $Y =$ 10 dobásból hányszor dobunk 6-ost $\Rightarrow$ $Y \sim \mathrm{BIN}\left(10, \frac{1}{6}\right)$

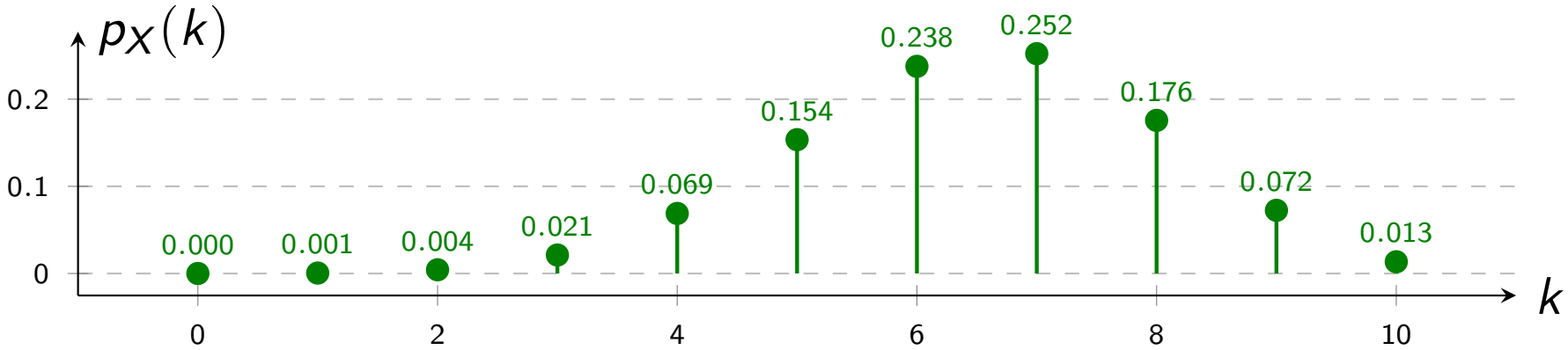
Binomiális eloszlás: súlyfüggvény

$X \sim \mathrm{BIN}(n, p)$ **súlyfüggvénye**:

$p_X(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n$, mert

- $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet kiválasztani a k sikerest az n próbálkozás közül
- ez a k darab próba egymástól függetlenül p valószínűséggel sikeres
- a maradék $n-k$ mindegyike $1-p$ valószínűséggel sikertelen

Példa: $n = 10$ és $p = 0.65$ esetén:

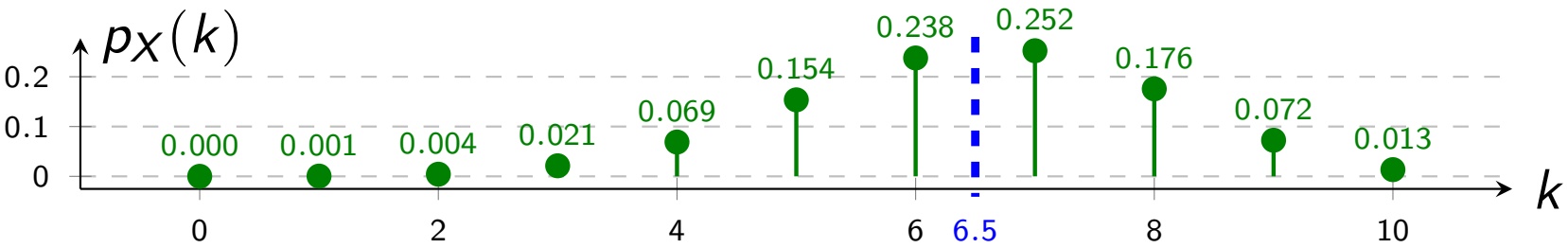


Binomiális eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{BIN}(n, p)$

- **Várható érték:** $\mathbb{E}(X) = n \cdot p$

  Példa: $n = 10$ és $p = 0.65$ esetén: $\mathbb{E}(X) = 6.5$



- **Szórásnégyzet:** $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$
- **Szórás:** $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

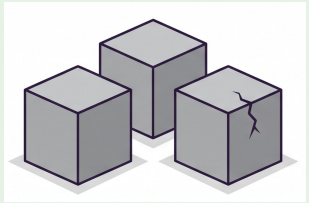
Megjegyzés:

- A fentiek levezethetők a várható érték és szórásnégyzet definíciókból
- De egyszerűbben kijönnek az alábbi már tanult eredményekből:
  1. Ha $X \sim \mathrm{BIN}(n, p)$, akkor előáll n darab független $\mathrm{BER}(p)$ eloszlású változó összegeként
  2. Ha $Y \sim \mathrm{BER}(p)$, akkor $\mathbb{E}(Y) = p$, $\mathrm{Var}(Y) = p(1 - p)$

Binomiális eloszlás: példa

Feladat (Betonkockák)

Legyen 3 db betonkockából a nem megfelelőek száma X. Tudjuk, hogy a kockák egymástól függetlenül 0.9 valószínűséggel megfelelőek.



a) Mi a valószínűsége, hogy legalább 2 kocka megfelelő?

b) Adjuk meg X várható értékét!

c) Adjuk meg X szórásnégyzetét!

Megoldás: $X \sim \mathrm{BIN}(3, 0.1)$

a) Pontosan akkor van legalább 2 megfelelő kocka, ha $X \leqslant 1$, ennek a valószínűsége binomiális súlyfüggvényt használva:

$$\mathbb{P}(X \leqslant 1) = p_X(0) + p_X(1) = 0.9^3 + 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9^2 = 0.972$$

b) $\mathbb{E}(X) = n \cdot p = 3 \cdot 0.1 = 0.3$ (lásd 13. dia)

c) $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.27$ (lásd 15. dia)

Poisson-eloszlás: motiváció

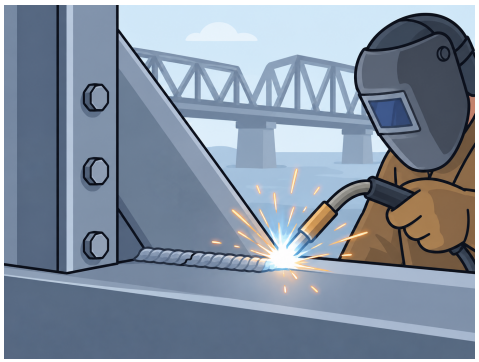
Milyen helyzetet modellezünk?

- Egy adott **idő**- vagy **térintervallumban** bekövetkező események számát vizsgáljuk
- Az egymást nem átfedő intervallumok eseményszámai **függetlenek**
- Az események **állandó** átlagos gyakorisággal fordulnak elő
- Nagyon **rövid** intervallumban **több esemény** együttes előfordulása **elhanyagolható**

$\Rightarrow$ Az ilyen jellegű eseményszámokat **Poisson**-eloszlással modellezzük

Példa:

1. Acélhíd hegesztéseiben lévő hibák száma
2. Gépelési hibák száma egy könyvben
3. Erős földrengések száma egy adott régióban
4. Egy felhőkarcolót érő extrém szelek száma



Poisson-eloszlás: definíció

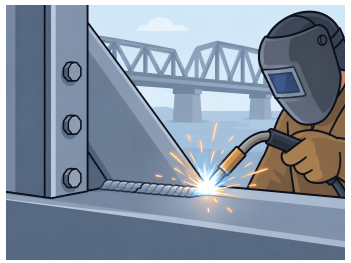
Definíció (Poisson-eloszlás)

Egy X valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterű **Poisson-eloszlású**, ha lehetséges értékei a természetes számok $(0, 1, 2, \ldots)$ és súlyfüggvénye

$$p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

- Jelölés: $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$
- A λ paraméter a vizsgált intervallumban (időben vagy térben) bekövetkező **események várható száma**

Példa:



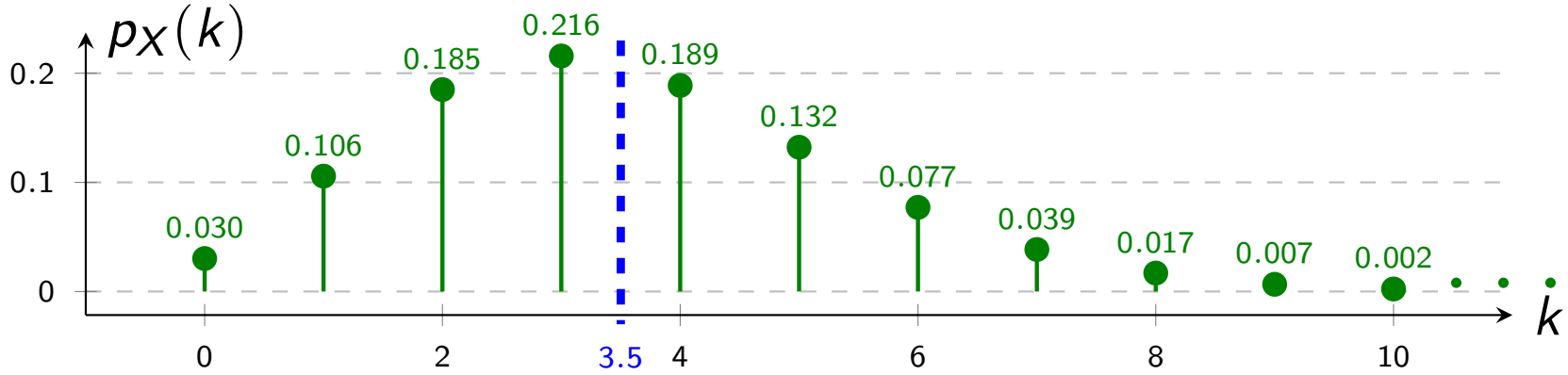
1. Legyen X egy 4 méter hosszú szakaszon a hibák száma egy olyan hegesztésnél, aminél méterenként átlagosan 0.5 hiba van $\Rightarrow$ $X \sim \mathrm{POI}(2)$
2. Legyen Y a következő 100 évben a földrengések száma egy olyan helyen, ahol átlagosan 5 évente van földrengés $\Rightarrow$ $Y \sim \mathrm{POI}(20)$

Poisson-eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$

- **Súlyfüggvénye**: $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots$

  Példa: $\lambda = 3.5$



- **Várható érték:** $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- **Szórásnégyzet:** $\mathrm{Var}(X) = \lambda$
- **Szórás:** $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\lambda}$

Poisson-eloszlás: példa

Feladat (Hegesztési hibák)

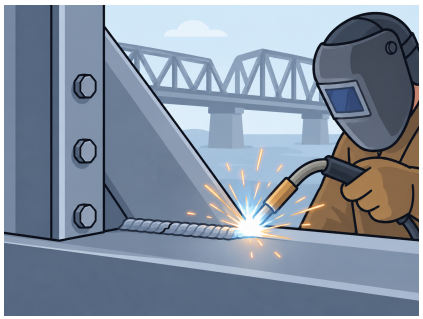
Egy acélhíd hegesztési varrataiban a hibák egymástól függetlenül, egyesével, állandó átlagos gyakorisággal fordulnak elő: méterenként átlagosan 0.5 hiba található. Mi a valószínűsége, hogy egy 4 méteres szakasz hibamentes? Mennyi a hibák számának szórása egy 4 méteres szakaszon?

Megoldás: Legyen X a hibák száma egy 4 méteres szakaszon

- A feltételekből következik, hogy X Poisson-eloszlású
- A várható hibaszám: $\lambda = 4 \cdot 0.5 = 2 \quad \Rightarrow \quad X \sim \mathrm{POI}(2)$

Ebből:

- $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2^0}{0!}\mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^{-2} \approx 0.135$
- $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2}$



Poisson-eloszlás: kapcsolat binomiális eloszlással

Tétel (Binomiális eloszlás közelítése Poissonnal)

Ha n nagy és p kicsi, akkor a $\mathrm{BIN}(n,p)$ eloszlás jól közelíthető egy Poisson-eloszlással, aminek a paramétere $\lambda = n \cdot p$.

Vagyis ha $X \sim \mathrm{BIN}(n,p)$, ahol n nagy és p kicsi, akkor

$$\mathbb{P}(X=k) \approx \frac{(np)^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-np}$$

Következmény

Sok, kis valószínűségű, független kísérletből a sikeresek számának eloszlását Poisson-eloszlással közelíthetjük.

Poisson-eloszlás: példa

Feladat (Betonkockagyár)

Egy betonkockagyár napi termelése 2000 darab. Tudjuk, hogy a kockák egymástól függetlenül 0.01 valószínűséggel hibásak. Mi a valószínűsége, hogy egy adott napon pontosan 18 hibás kocka készül?



Megoldás: Jelölje X a hibás kockák számát $\Rightarrow$ $X \sim \mathrm{BIN}(2000, 0.01)$

- **Pontos** érték: binomiális eloszlással

$$\mathbb{P}(X = 18) = \binom{2000}{18} \cdot 0.01^{18} \cdot 0.99^{1982} \approx 0.0847$$

- **Közelítés**: $\mathrm{POI}(2000 \cdot 0.01)$, vagyis $\mathrm{POI}(20)$ eloszlással

$$\mathbb{P}(X = 18) \approx \frac{20^{18}}{18!} \mathrm{e}^{-20} \approx 0.0844$$

Geometriai eloszlás

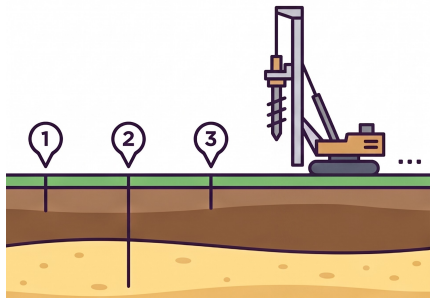
Definíció (Geometriai eloszlás)

Egy p valószínűséggel sikeres kísérletet végzünk el végtelen sokszor úgy, hogy a kísérletek egymástól függetlenek. Ha X jelöli az **első sikerig** (a sikerest is beleszámítva) szükséges próbálkozások számát, akkor X **geometriai** eloszlású p paraméterrel.

- Jelölés: $X \sim \mathrm{GEO}(p)$
- Lehetséges értékek a pozitív egészek: $1, 2, 3, \ldots$

Példa:

1. $X =$ hányadik dobásra dobunk először 6-ost egy szabályos dobókockával $\Rightarrow$ $X \sim \mathrm{GEO}\left(\frac{1}{6}\right)$
2. Ha Y a 11. dián definiált változó (hányadik fúrásra találunk megfelelő talajt) $\Rightarrow$ $Y \sim \mathrm{GEO}(0.3)$



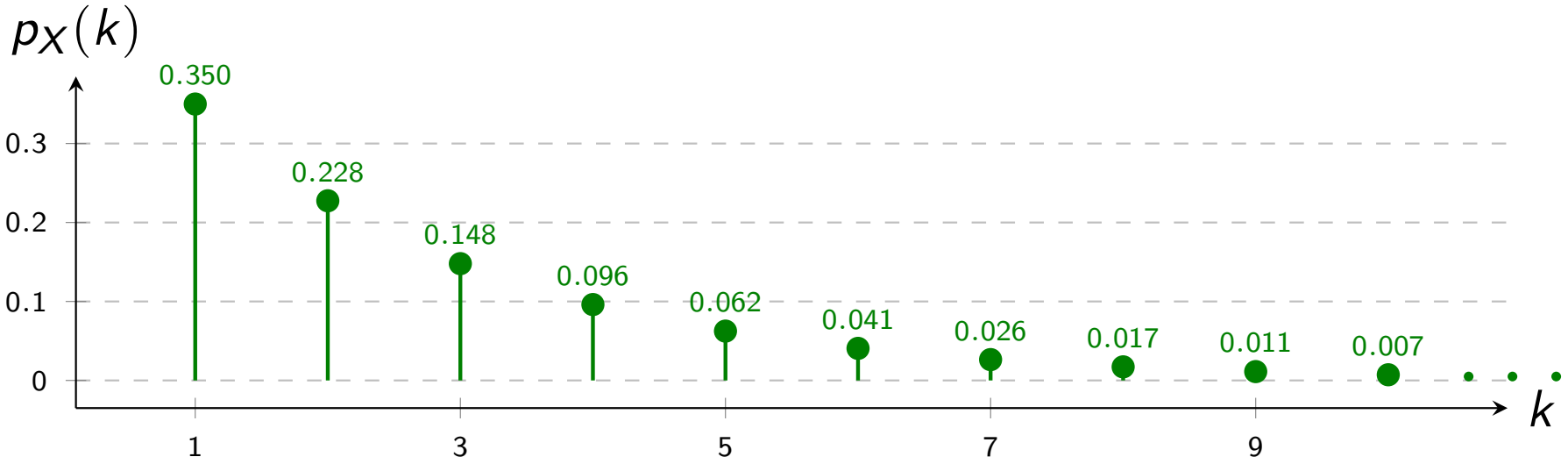
Geometriai eloszlás: súlyfüggvény

$X \sim \mathrm{GEO}(p)$ **súlyfüggvénye**:

$p_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$, ahol $k = 1, 2, 3, \ldots$, mert

- az első $k-1$ kísérlet egymástól függetlenül $1-p$ valószínűséggel sikertelen
- a k-adik kísérlet p valószínűséggel sikeres

Példa: $p = 0.35$ esetén:

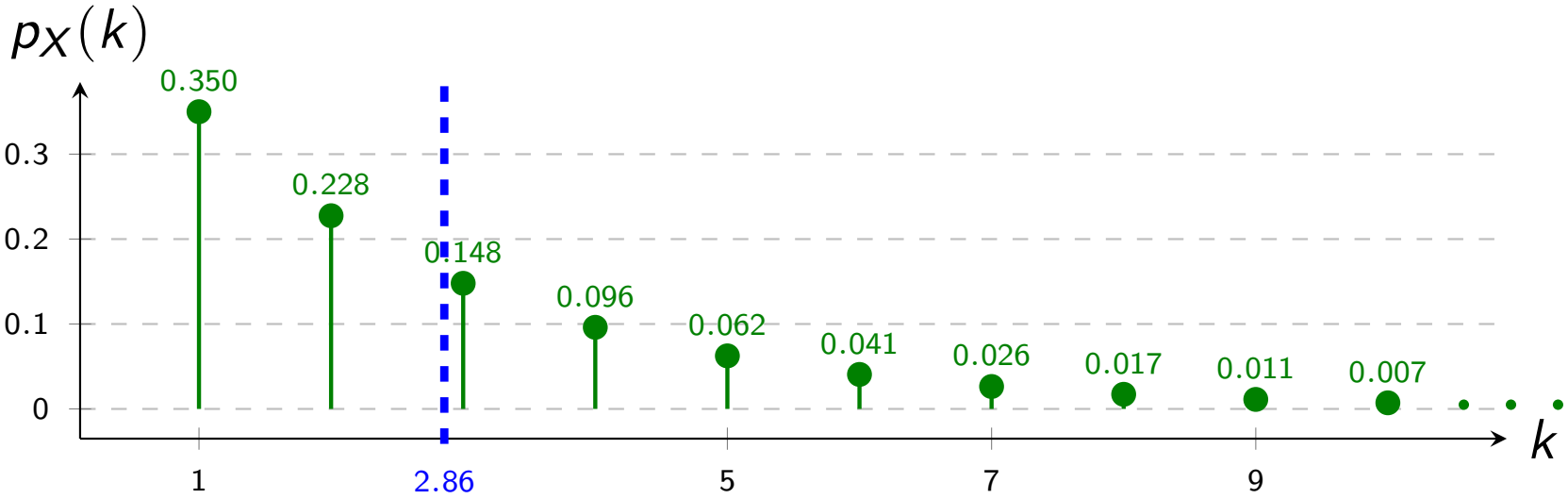


Geometriai eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{GEO}(p)$

- **Várható érték:** $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$

  Példa: $p = 0.35$ esetén: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{0.35} \approx 2.86$

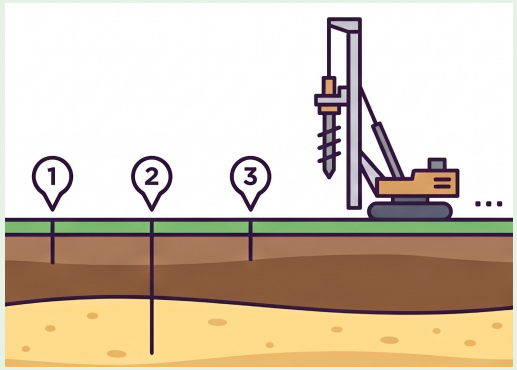


- **Szórásnégyzet:** $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- **Szórás:** $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

Geometriai eloszlás: példa

Feladat (Talajfúrás)

Próbafúrásokat végzünk, jelölje Y, hogy hányadik fúrásra találunk megfelelő talajt. Minden fúrásnál a többitől függetlenül 0.3 valószínűséggel járunk sikerrel.



a) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb három fúrás után találunk megfelelő talajt?

b) Adjuk meg Y várható értékét!

c) Adjuk meg Y szórását!

Megoldás: $Y \sim \mathrm{GEO}(0.3)$, így

a) $\mathbb{P}(Y \leqslant 3) = p_Y(1) + p_Y(2) + p_Y(3) = 0.3 + 0.7 \cdot 0.3 + 0.7^2 \cdot 0.3 = 0.657$

b) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$

c) $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{\frac{1-0.3}{0.3^2}} = \frac{\sqrt{70}}{3}$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Valószínűségi változók: osztályozás, függetlenség
2. Diszkrét valószínűségi változók:
   - Súlyfüggvény: $p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$
   - Várható érték: $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i)$
   - Szórásnégyzet: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
3. Nevezetes eloszlások:

	Mikor használjuk?	$p_X(k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
BIN(n,p)	rögzített számú próbából sikeresek száma	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
POI(λ)	adott intervallumban események száma	$\frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$	λ	λ
GEO(p)	első sikerig szükséges próbák száma	$(1-p)^{k-1} p$	$1/p$	$(1-p)/p^2$

Köszönöm a figyelmet!