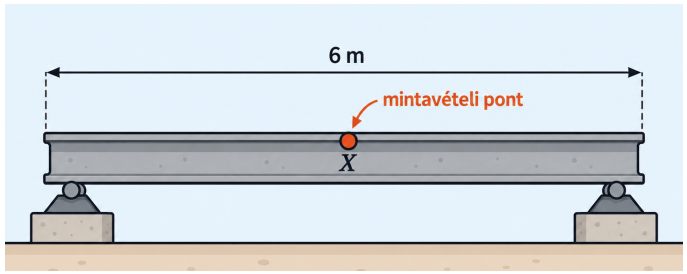
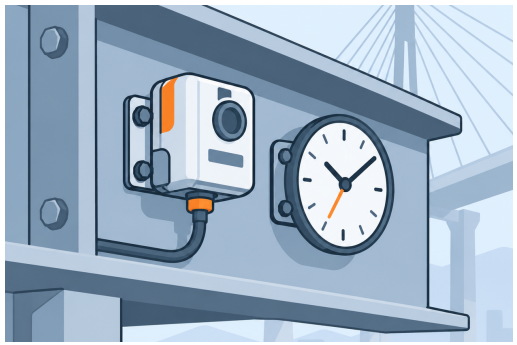
Matematika A3 építőmérnököknek 6. előadás

Folytonos valószínűségi változók

Szőke Márton

2026. november 16.





1. Folytonos valószínűségi változók
2. Nevezetes folytonos eloszlások

1 Folytonos valószínűségi változók

2 Nevezetes folytonos eloszlások

Motiváció

Gyakorlatban sokszor találkozunk **folytonos** változókkal

Motiváció

Gyakorlatban sokszor találkozunk **folytonos** változókkal:



Méretek: pl. hossz, tömeg, egy repedés helye

Motiváció

Gyakorlatban sokszor találkozunk **folytonos** változókkal:


Méretek: pl. hossz, tömeg, egy repedés helye


Anyagjellemzők: pl. szilárdság, sűrűség, rugalmassági modulus

Motiváció

Gyakorlatban sokszor találkozunk **folytonos** változókkal:


Méretek: pl. hossz, tömeg, egy repedés helye


Anyagjellemzők: pl. szilárdság, sűrűség, rugalmassági modulus


Időtartamok: pl. meghibásodásig eltelt idő, kivitelezési idő

Motiváció

Gyakorlatban sokszor találkozunk **folytonos** változókkal:


Méretek: pl. hossz, tömeg, egy repedés helye


Anyagjellemzők: pl. szilárdság, sűrűség, rugalmassági modulus


Időtartamok: pl. meghibásodásig eltelt idő, kivitelezési idő


Vízállás, vízhozam

Motiváció

Gyakorlatban sokszor találkozunk **folytonos** változókkal:


Méretek: pl. hossz, tömeg, egy repedés helye


Anyagjellemzők: pl. szilárdság, sűrűség, rugalmassági modulus


Időtartamok: pl. meghibásodásig eltelt idő, kivitelezési idő


Vízállás, vízhozam

Diszkrét valváltozókkal ellentétben ezek **nem elszigetelt** értékeket vehetnek fel

Motiváció

Gyakorlatban sokszor találkozunk **folytonos** változókkal:


Méretek: pl. hossz, tömeg, egy repedés helye


Anyagjellemzők: pl. szilárdság, sűrűség, rugalmassági modulus


Időtartamok: pl. meghibásodásig eltelt idő, kivitelezési idő


Vízállás, vízhozam

Diszkrét valváltozókkal ellentétben ezek **nem elszigetelt** értékeket vehetnek fel, **hanem egy intervallumon** belül bármilyen értéket

Motiváció

Gyakorlatban sokszor találkozunk **folytonos** változókkal:


Méretek: pl. hossz, tömeg, egy repedés helye


Anyagjellemzők: pl. szilárdság, sűrűség, rugalmassági modulus


Időtartamok: pl. meghibásodásig eltelt idő, kivitelezési idő


Vízállás, vízhozam

Diszkrét valváltozókkal ellentétben ezek **nem elszigetelt** értékeket vehetnek fel, **hanem egy intervallumon** belül bármilyen értéket

- Nem az egyes értékek valószínűsége (pl. $\mathbb{P}(X = 100)$) az érdekes,

Motiváció

Gyakorlatban sokszor találkozunk **folytonos** változókkal:


Méretek: pl. hossz, tömeg, egy repedés helye


Anyagjellemzők: pl. szilárdság, sűrűség, rugalmassági modulus


Időtartamok: pl. meghibásodásig eltelt idő, kivitelezési idő


Vízállás, vízhozam

Diszkrét valváltozókkal ellentétben ezek **nem elszigetelt** értékeket vehetnek fel, **hanem egy intervallumon** belül bármilyen értéket

- Nem az egyes értékek valószínűsége (pl. $\mathbb{P}(X = 100)$) az érdekes,
- Hanem intervallumok valószínűsége (pl. $\mathbb{P}(99 < X < 101)$)

Motiváció

Gyakorlatban sokszor találkozunk **folytonos** változókkal:


Méretek: pl. hossz, tömeg, egy repedés helye


Anyagjellemzők: pl. szilárdság, sűrűség, rugalmassági modulus


Időtartamok: pl. meghibásodásig eltelt idő, kivitelezési idő


Vízállás, vízhozam

Diszkrét valváltozókkal ellentétben ezek **nem elszigetelt** értékeket vehetnek fel, **hanem egy intervallumon** belül bármilyen értéket

- Nem az egyes értékek valószínűsége (pl. $\mathbb{P}(X = 100)$) az érdekes,
- Hanem intervallumok valószínűsége (pl. $\mathbb{P}(99 < X < 101)$)

$\Rightarrow$ Súlyfüggvény helyett más függvényre van szükségünk

Folytonos valószínűségi változók

Definíció (Folytonos valószínűségi változó)

Azt mondjuk, hogy az X valváltozó (abszolút) **folytonos**, ha létezik olyan $f \geqslant 0$ függvény, amelyre minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Folytonos valószínűségi változók

Definíció (Folytonos valószínűségi változó)

Azt mondjuk, hogy az X valváltozó (abszolút) **folytonos**, ha létezik olyan $f \geqslant 0$ függvény, amelyre minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Ezt az $f(x)$ függvényt az X **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Folytonos valószínűségi változók

Definíció (Folytonos valószínűségi változó)

Azt mondjuk, hogy az X valváltozó (abszolút) **folytonos**, ha létezik olyan $f \geqslant 0$ függvény, amelyre minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Ezt az $f(x)$ függvényt az X **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

- Ekkor $\mathbb{P}(X = a) \overset{(1)}{=} \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Folytonos valószínűségi változók

Definíció (Folytonos valószínűségi változó)

Azt mondjuk, hogy az X valváltozó (abszolút) **folytonos**, ha létezik olyan $f \geqslant 0$ függvény, amelyre minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Ezt az $f(x)$ függvényt az X **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

- Ekkor $\mathbb{P}(X = a) \overset{(1)}{=} \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ tetszőleges a-ra

Folytonos valószínűségi változók

Definíció (Folytonos valószínűségi változó)

Azt mondjuk, hogy az X valváltozó (abszolút) **folytonos**, ha létezik olyan $f \geqslant 0$ függvény, amelyre minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Ezt az $f(x)$ függvényt az X **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

- Ekkor $\mathbb{P}(X = a) \overset{(1)}{=} \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ tetszőleges a-ra

  Megjegyzés: A 0 valószínűség nem azt jelenti, hogy lehetetlen

Folytonos valószínűségi változók

Definíció (Folytonos valószínűségi változó)

Azt mondjuk, hogy az X valváltozó (abszolút) **folytonos**, ha létezik olyan $f \geqslant 0$ függvény, amelyre minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Ezt az $f(x)$ függvényt az X **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

- Ekkor $\mathbb{P}(X = a) \overset{(1)}{=} \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ tetszőleges a-ra

  Megjegyzés: A 0 valószínűség nem azt jelenti, hogy lehetetlen
- Így a végpontok hozzáadása vagy elhagyása nem számít:

Folytonos valószínűségi változók

Definíció (Folytonos valószínűségi változó)

Azt mondjuk, hogy az X valváltozó (abszolút) **folytonos**, ha létezik olyan $f \geqslant 0$ függvény, amelyre minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Ezt az $f(x)$ függvényt az X **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

- Ekkor $\mathbb{P}(X = a) \overset{(1)}{=} \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ tetszőleges a-ra

  Megjegyzés: A 0 valószínűség nem azt jelenti, hogy lehetetlen
- Így a végpontok hozzáadása vagy elhagyása nem számít:

  $$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b)$$

Folytonos valószínűségi változók

Definíció (Folytonos valószínűségi változó)

Azt mondjuk, hogy az X valváltozó (abszolút) **folytonos**, ha létezik olyan $f \geqslant 0$ függvény, amelyre minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Ezt az $f(x)$ függvényt az X **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

- Ekkor $\mathbb{P}(X = a) \overset{(1)}{=} \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ tetszőleges a-ra

  Megjegyzés: A 0 valószínűség nem azt jelenti, hogy lehetetlen
- Így a végpontok hozzáadása vagy elhagyása nem számít:

  $$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b)$$

Folytonos valószínűségi változók

Definíció (Folytonos valószínűségi változó)

Azt mondjuk, hogy az X valváltozó (abszolút) **folytonos**, ha létezik olyan $f \geqslant 0$ függvény, amelyre minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Ezt az $f(x)$ függvényt az X **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

- Ekkor $\mathbb{P}(X = a) \overset{(1)}{=} \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ tetszőleges a-ra

  Megjegyzés: A 0 valószínűség nem azt jelenti, hogy lehetetlen
- Így a végpontok hozzáadása vagy elhagyása nem számít:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$$

Sűrűségfüggvény

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. Nemnegatív: $f(x) \geqslant 0$

Sűrűségfüggvény

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. Nemnegatív: $f(x) \geqslant 0$
2. A teljes számegyenesen vett integrálja 1

Sűrűségfüggvény

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. Nemnegatív: $f(x) \geqslant 0$
2. A teljes számegyenesen vett integrálja 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(X \in \mathbb{R})$

Sűrűségfüggvény

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. Nemnegatív: $f(x) \geqslant 0$
2. A teljes számegyenesen vett integrálja 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$

Sűrűségfüggvény

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. Nemnegatív: $f(x) \geqslant 0$
2. A teljes számegyenesen vett integrálja 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$

Intuitív jelentés:

Sűrűségfüggvény

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. Nemnegatív: $f(x) \geqslant 0$
2. A teljes számegyenesen vett integrálja 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$

Intuitív jelentés:

- Mennyire **sűrűsödik** a valószínűség

Sűrűségfüggvény

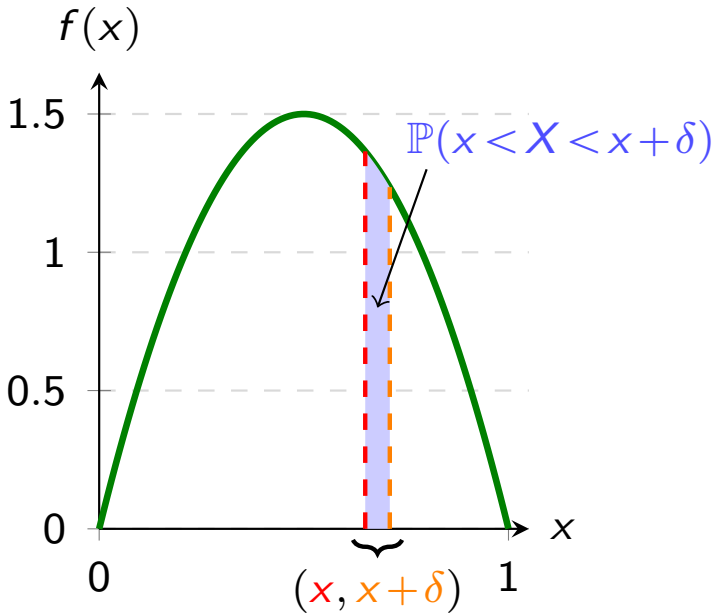
Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. Nemnegatív: $f(x) \geqslant 0$
2. A teljes számegyenesen vett integrálja 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$

Intuitív jelentés:

- Mennyire **sűrűsödik** a valószínűség
- Ha f folytonos x-ben és $\delta > 0$ kicsi:

$$\mathbb{P}(x < X < x+\delta) \overset{(1)}{=} \int_{x}^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t$$



Sűrűségfüggvény

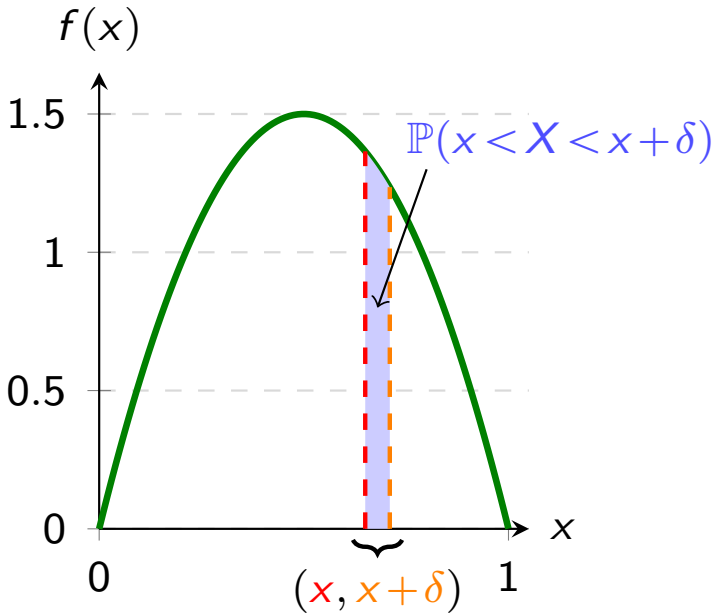
Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. Nemnegatív: $f(x) \geqslant 0$
2. A teljes számegyenesen vett integrálja 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$

Intuitív jelentés:

- Mennyire **sűrűsödik** a valószínűség
- Ha f folytonos x-ben és $\delta > 0$ kicsi:

$$\mathbb{P}(x < X < x+\delta) \overset{(1)}{=} \int_{x}^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t \approx f(x) \cdot \delta$$



Sűrűségfüggvény

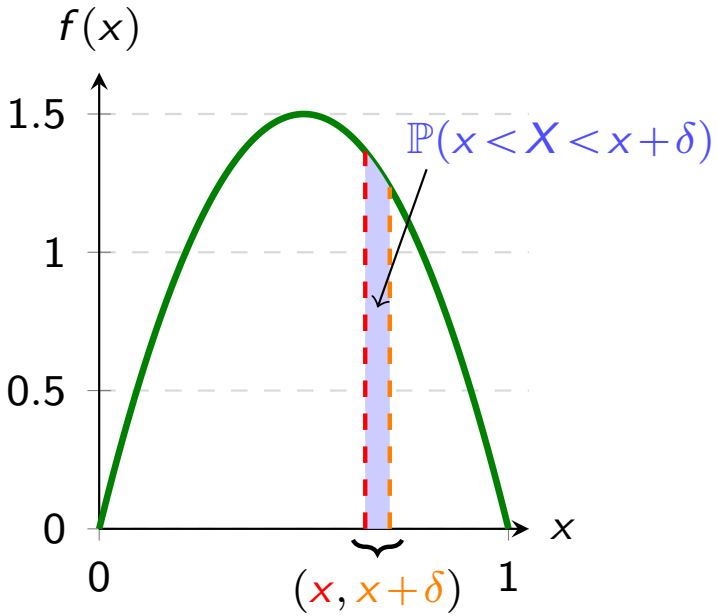
Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. Nemnegatív: $f(x) \geqslant 0$
2. A teljes számegyenesen vett integrálja 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$

Intuitív jelentés:

- Mennyire **sűrűsödik** a valószínűség
- Ha f folytonos x-ben és $\delta > 0$ kicsi:

$$\mathbb{P}(x < X < x+\delta) \overset{(1)}{=} \int_{x}^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t \approx f(x)\cdot\delta$$



Megjegyzés:

- Nem valószínűséget fejez ki, így az értéke lehet 1-nél nagyobb is

Sűrűségfüggvény

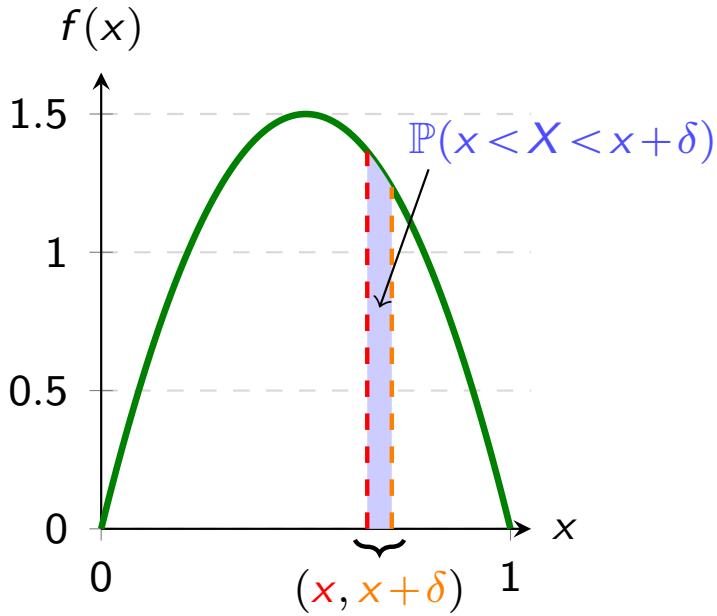
Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. Nemnegatív: $f(x) \geqslant 0$
2. A teljes számegyenesen vett integrálja 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$

Intuitív jelentés:

- Mennyire **sűrűsödik** a valószínűség
- Ha f folytonos x-ben és $\delta > 0$ kicsi:

$$\mathbb{P}(x < X < x+\delta) \overset{(1)}{=} \int_{x}^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t \approx f(x)\cdot\delta$$



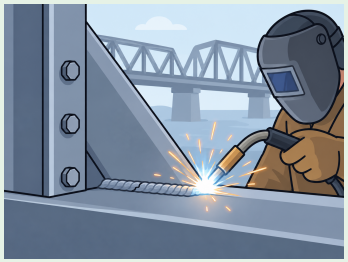
Megjegyzés:

- Nem valószínűséget fejez ki, így az értéke lehet 1-nél nagyobb is
- A sűrűségfüggvénynek nem kell folytonosnak lennie

Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét.

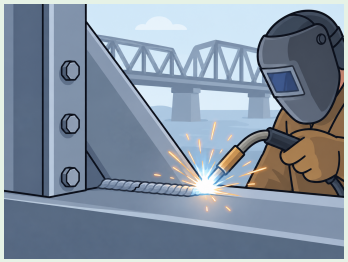


Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét. Tudjuk, hogy X eloszlását az alábbi sűrűségfüggvénnyel lehet leírni:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

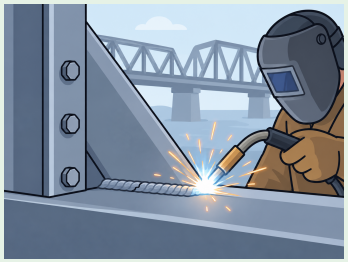


Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét. Tudjuk, hogy X eloszlását az alábbi sűrűségfüggvénnyel lehet leírni:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



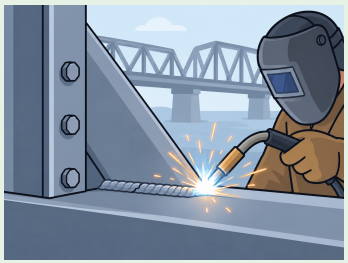
Mennyi a c konstans értéke?

Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét. Tudjuk, hogy X eloszlását az alábbi sűrűségfüggvénnyel lehet leírni:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Mennyi a c konstans értéke?

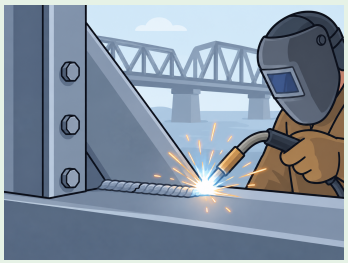
Megoldás:

Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét. Tudjuk, hogy X eloszlását az alábbi sűrűségfüggvénnyel lehet leírni:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Mennyi a c konstans értéke?

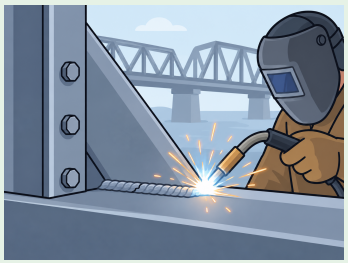
Megoldás: Az kell, hogy $f \geqslant 0$

Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét. Tudjuk, hogy X eloszlását az alábbi sűrűségfüggvénnyel lehet leírni:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Mennyi a c konstans értéke?

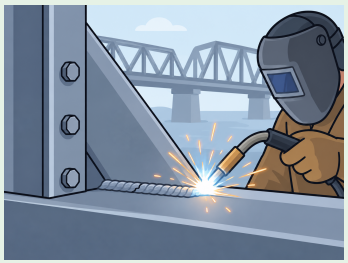
Megoldás: Az kell, hogy $f \geqslant 0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét. Tudjuk, hogy X eloszlását az alábbi sűrűségfüggvénnyel lehet leírni:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Mennyi a c konstans értéke?

Megoldás: Az kell, hogy $f \geqslant 0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, tehát

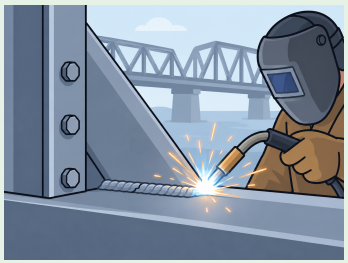
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét. Tudjuk, hogy X eloszlását az alábbi sűrűségfüggvénnyel lehet leírni:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Mennyi a c konstans értéke?

Megoldás: Az kell, hogy $f \geqslant 0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, tehát

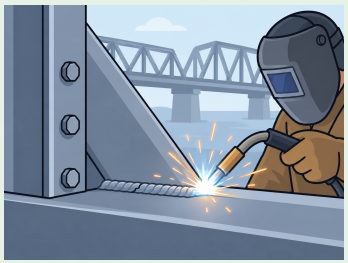
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} cx\,\mathrm{d}x$$

Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét. Tudjuk, hogy X eloszlását az alábbi sűrűségfüggvénnyel lehet leírni:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Mennyi a c konstans értéke?

Megoldás: Az kell, hogy $f \geqslant 0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, tehát

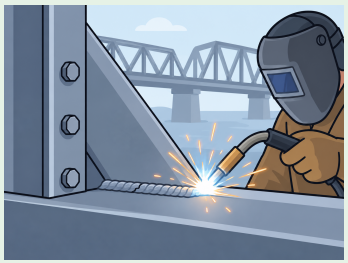
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} cx\,\mathrm{d}x = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét. Tudjuk, hogy X eloszlását az alábbi sűrűségfüggvénnyel lehet leírni:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Mennyi a c konstans értéke?

Megoldás: Az kell, hogy $f \geqslant 0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, tehát

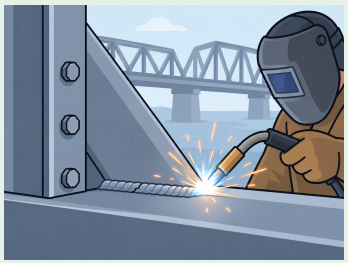
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} cx\,\mathrm{d}x = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2c$$

Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét. Tudjuk, hogy X eloszlását az alábbi sűrűségfüggvénnyel lehet leírni:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Mennyi a c konstans értéke?

Megoldás: Az kell, hogy $f \geqslant 0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, tehát

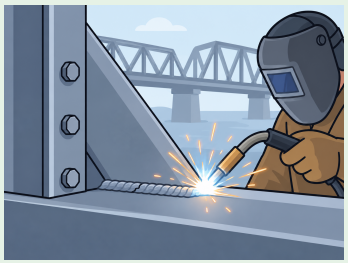
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} cx\,\mathrm{d}x = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2c \quad \Rightarrow \quad c = \tfrac{1}{2}$$

Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Jelölje X egy 2 méter hosszú hegesztési varraton észlelt hiba bal végtől mért helyét. Tudjuk, hogy X eloszlását az alábbi sűrűségfüggvénnyel lehet leírni:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

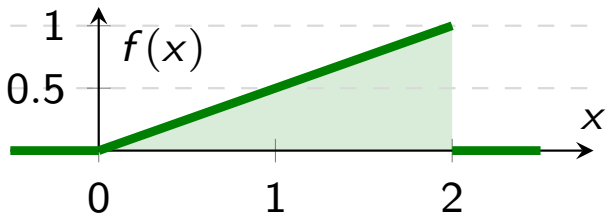


Mennyi a c konstans értéke?

Megoldás: Az kell, hogy $f \geqslant 0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, tehát

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} cx\,\mathrm{d}x = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2c \quad \Rightarrow \quad c = \tfrac{1}{2}$$

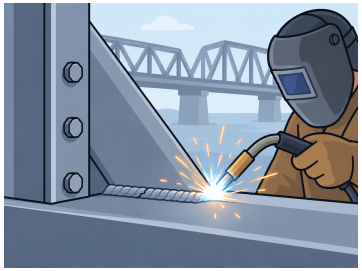
Így: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$



Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

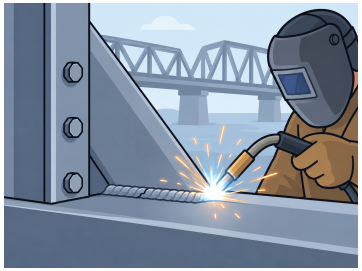
Mennyi a valószínűsége, hogy az előző feladatbeli hiba helye 1 méter és 1.5 méter közé esik?



Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Mennyi a valószínűsége, hogy az előző feladatbeli hiba helye 1 méter és 1.5 méter közé esik?

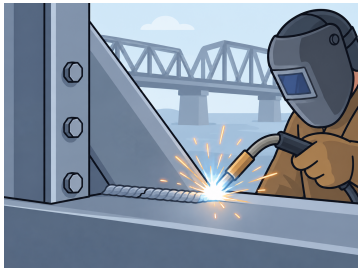


Megoldás:

Sűrűségfüggvény: példa

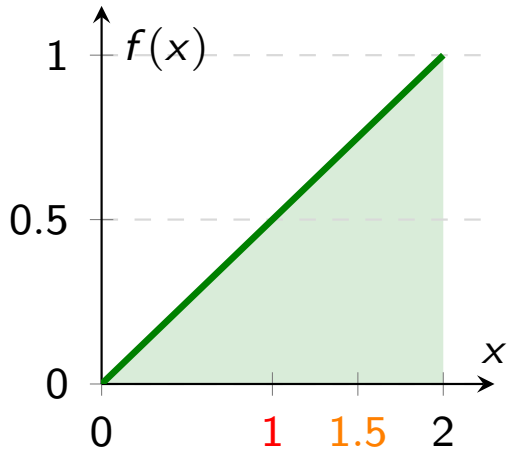
Feladat (Hegesztési hiba helye)

Mennyi a valószínűsége, hogy az előző feladatbeli hiba helye 1 méter és 1.5 méter közé esik?



Megoldás:

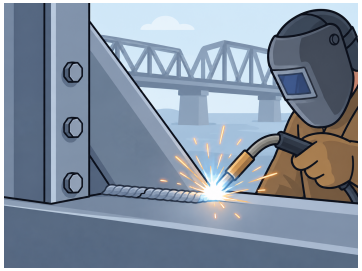
- Tudjuk, hogy $f(x) = \frac{x}{2}$, ha $x \in [0, 2]$



Sűrűségfüggvény: példa

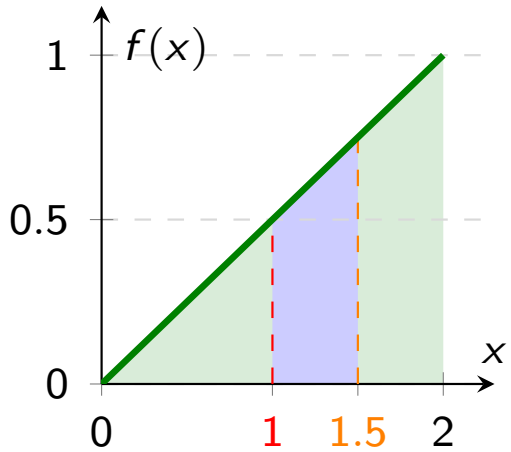
Feladat (Hegesztési hiba helye)

Mennyi a valószínűsége, hogy az előző feladatbeli hiba helye 1 méter és 1.5 méter közé esik?



Megoldás:

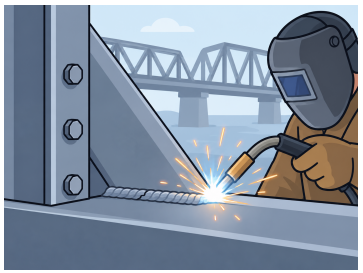
- Tudjuk, hogy $f(x) = \frac{x}{2}$, ha $x \in [0, 2]$



Sűrűségfüggvény: példa

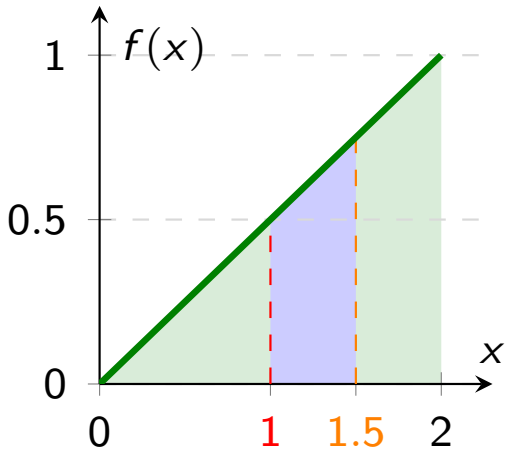
Feladat (Hegesztési hiba helye)

Mennyi a valószínűsége, hogy az előző feladatbeli hiba helye 1 méter és 1.5 méter közé esik?



Megoldás:

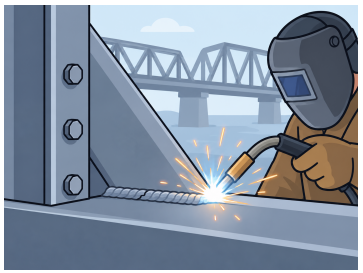
- Tudjuk, hogy $f(x) = \frac{x}{2}$, ha $x \in [0, 2]$
- Ebből a valószínűséget integrálással tudjuk számolni:



Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

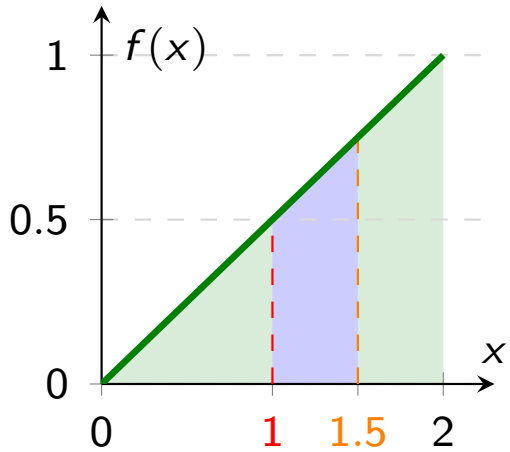
Mennyi a valószínűsége, hogy az előző feladatbeli hiba helye 1 méter és 1.5 méter közé esik?



Megoldás:

- Tudjuk, hogy $f(x) = \frac{x}{2}$, ha $x \in [0, 2]$
- Ebből a valószínűséget integrálással tudjuk számolni:

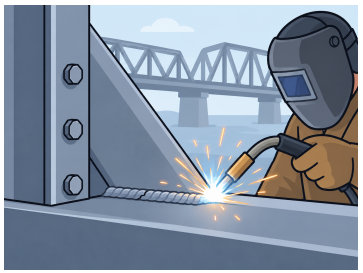
$$\mathbb{P}(1 < X < 1.5) = \int_1^{1.5} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$



Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

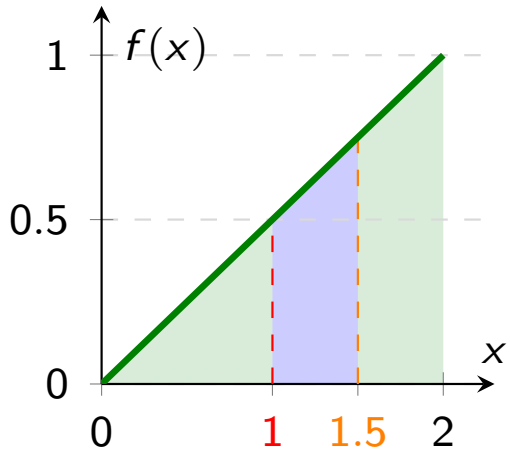
Mennyi a valószínűsége, hogy az előző feladatbeli hiba helye 1 méter és 1.5 méter közé esik?



Megoldás:

- Tudjuk, hogy $f(x) = \frac{x}{2}$, ha $x \in [0, 2]$
- Ebből a valószínűséget integrálással tudjuk számolni:

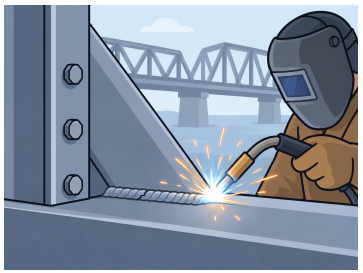
$$\mathbb{P}(1 < X < 1.5) = \int_1^{1.5} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{1.5}$$



Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Mennyi a valószínűsége, hogy az előző feladatbeli hiba helye 1 méter és 1.5 méter közé esik?

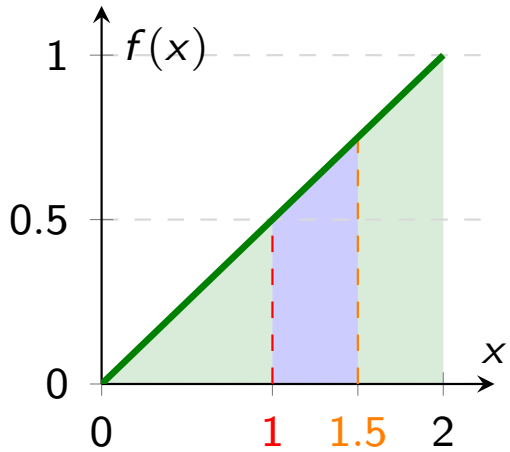


Megoldás:

- Tudjuk, hogy $f(x) = \frac{x}{2}$, ha $x \in [0, 2]$
- Ebből a valószínűséget integrálással tudjuk számolni:

$$\mathbb{P}(1 < X < 1.5) = \int_1^{1.5} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{1.5}$$

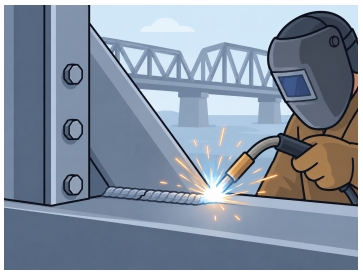
$$= \frac{1.5^2 - 1^2}{4}$$



Sűrűségfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Mennyi a valószínűsége, hogy az előző feladatbeli hiba helye 1 méter és 1.5 méter közé esik?

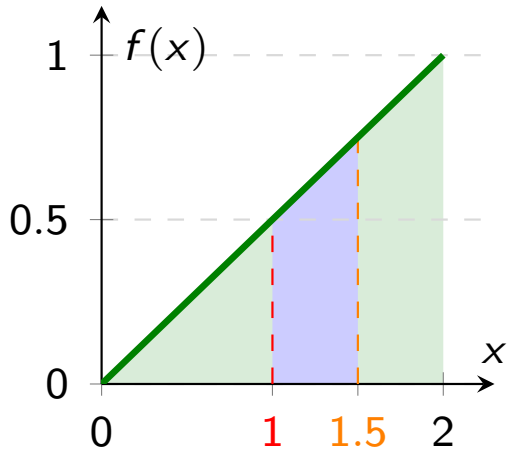


Megoldás:

- Tudjuk, hogy $f(x) = \frac{x}{2}$, ha $x \in [0, 2]$
- Ebből a valószínűséget integrálással tudjuk számolni:

$$\mathbb{P}(1 < X < 1.5) = \int_1^{1.5} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{1.5}$$

$$= \frac{1.5^2 - 1^2}{4} = 0.3125$$



Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Egy X valváltozó **eloszlásfüggvénye**: $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Egy X valváltozó **eloszlásfüggvénye**: $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Megjegyzés:

- $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ definíciót is szokták használni

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Egy X valváltozó **eloszlásfüggvénye**: $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Megjegyzés:

- $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ definíciót is szokták használni
- Folytonos valváltozó esetén nincs különbség a definíciók között

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Egy X valváltozó **eloszlásfüggvénye**: $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Megjegyzés:

- $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ definíciót is szokták használni
- Folytonos valváltozó esetén nincs különbség a definíciók között

Kapcsolat sűrűségfüggvénnyel:

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Egy X valváltozó **eloszlásfüggvénye**: $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Megjegyzés:

- $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ definíciót is szokták használni
- Folytonos valváltozó esetén nincs különbség a definíciók között

Kapcsolat sűrűségfüggvénnyel:

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, azaz $F'(x) = f(x)$, ha f az x-ben folytonos

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Egy X valváltozó **eloszlásfüggvénye**: $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Megjegyzés:

- $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ definíciót is szokták használni
- Folytonos valváltozó esetén nincs különbség a definíciók között

Kapcsolat sűrűségfüggvénnyel:

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, azaz $F'(x) = f(x)$, ha f az x-ben folytonos
- Így valószínűségek $F(x)$-ből **behelyettesítéssel** számolhatók

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Egy X valváltozó **eloszlásfüggvénye**: $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Megjegyzés:

- $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ definíciót is szokták használni
- Folytonos valváltozó esetén nincs különbség a definíciók között

Kapcsolat sűrűségfüggvénnyel:

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, azaz $F'(x) = f(x)$, ha f az x-ben folytonos
- Így valószínűségek $F(x)$-ből **behelyettesítéssel** számolhatók:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Egy X valváltozó **eloszlásfüggvénye**: $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Megjegyzés:

- $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ definíciót is szokták használni
- Folytonos valváltozó esetén nincs különbség a definíciók között

Kapcsolat sűrűségfüggvénnyel:

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, azaz $F'(x) = f(x)$, ha f az x-ben folytonos
- Így valószínűségek $F(x)$-ből **behelyettesítéssel** számolhatók:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Egy X valváltozó **eloszlásfüggvénye**: $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Megjegyzés:

- $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ definíciót is szokták használni
- Folytonos valváltozó esetén nincs különbség a definíciók között

Kapcsolat sűrűségfüggvénnyel:

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, azaz $F'(x) = f(x)$, ha f az x-ben folytonos
- Így valószínűségek $F(x)$-ből **behelyettesítéssel** számolhatók:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Spec.: $\mathbb{P}(X < b) = F(b)$

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Egy X valváltozó **eloszlásfüggvénye**: $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.

Megjegyzés:

- $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ definíciót is szokták használni
- Folytonos valváltozó esetén nincs különbség a definíciók között

Kapcsolat sűrűségfüggvénnyel:

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, azaz $F'(x) = f(x)$, ha f az x-ben folytonos
- Így valószínűségek $F(x)$-ből **behelyettesítéssel** számolhatók:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Spec.: $\mathbb{P}(X < b) = F(b)$ és $\mathbb{P}(a < X) = 1 - F(a)$

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t$

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim_{x \to -\infty} F(x)$

   $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x)$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < -\infty)$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < -\infty) = 0,$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < -\infty) = 0,$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X < x)$$

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < -\infty) = 0,$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < +\infty)$$

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < -\infty) = 0,$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < +\infty) = 1$$

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < -\infty) = 0,$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < +\infty) = 1$
4. Balról **folytonos**

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

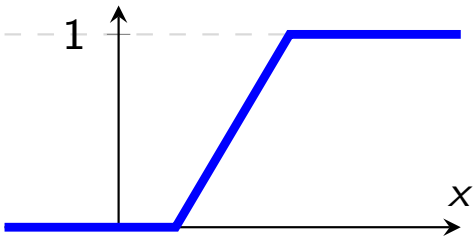
1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < -\infty) = 0,$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < +\infty) = 1$
4. Balról **folytonos** (folytonos valváltozó esetén F folytonos)

Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < -\infty) = 0,$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < +\infty) = 1$
4. Balról **folytonos** (folytonos valváltozó esetén F folytonos)

Példa:

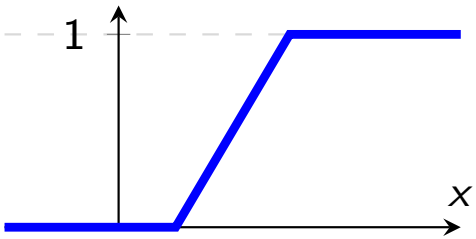


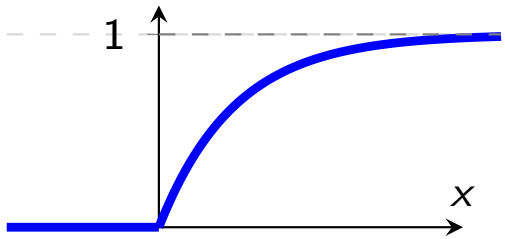
Eloszlásfüggvény

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < -\infty) = 0,$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < +\infty) = 1$
4. Balról **folytonos** (folytonos valváltozó esetén F folytonos)

Példa:



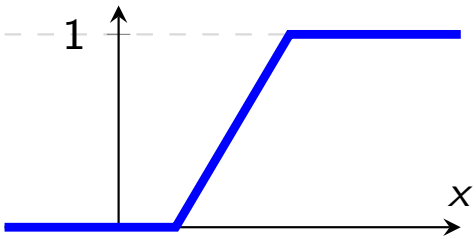


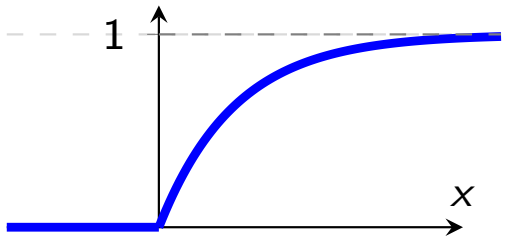
Eloszlásfüggvény

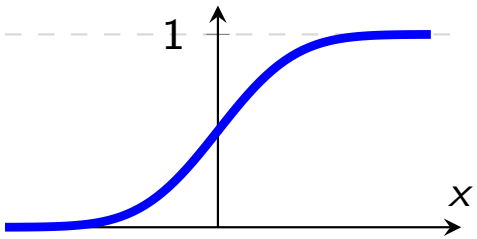
Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ minden x-re
2. **Monoton növő**: ha $a < b$, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Határértékei: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < -\infty) = 0,$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < +\infty) = 1$
4. Balról **folytonos** (folytonos valváltozó esetén F folytonos)

Példa:







Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét!

Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba 1 és 1.5 méter közé esik (lásd a 8. diát)!

Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba 1 és 1.5 méter közé esik (lásd a 8. diát)!

Megoldás:

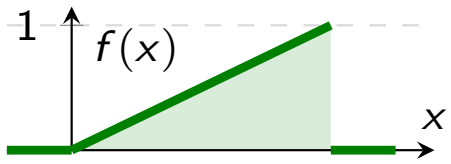
Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba 1 és 1.5 méter közé esik (lásd a 8. diát)!

Megoldás:

- Láttuk: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$



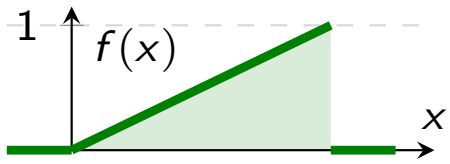
Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba 1 és 1.5 méter közé esik (lásd a 8. diát)!

Megoldás:

- Láttuk: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$



- Így $x \in [0, 2]$ esetén: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

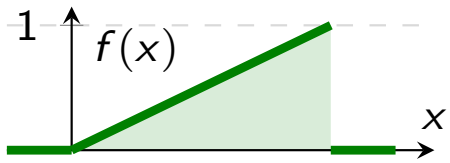
Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba 1 és 1.5 méter közé esik (lásd a 8. diát)!

Megoldás:

- Láttuk: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$



- Így $x \in [0,2]$ esetén: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$

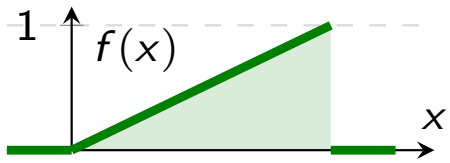
Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba 1 és 1.5 méter közé esik (lásd a 8. diát)!

Megoldás:

- Láttuk: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$



- Így $x \in [0,2]$ esetén: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{4}$

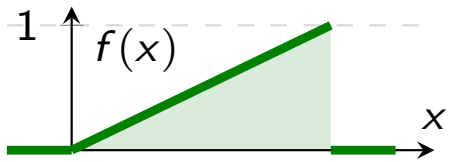
Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba 1 és 1.5 méter közé esik (lásd a 8. diát)!

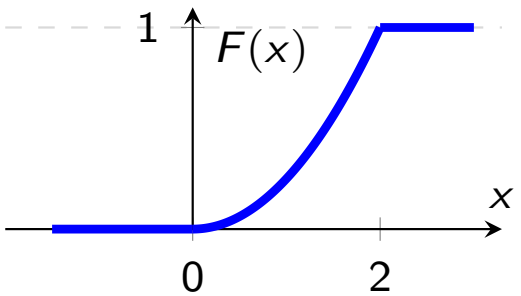
Megoldás:

- Láttuk: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$



- Így $x \in [0,2]$ esetén: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{4}$
- Tehát:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & \text{ha } 2 < x \end{cases}$$



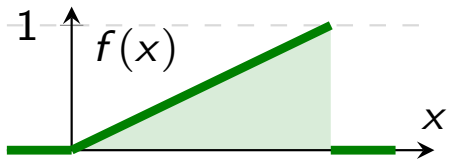
Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba 1 és 1.5 méter közé esik (lásd a 8. diát)!

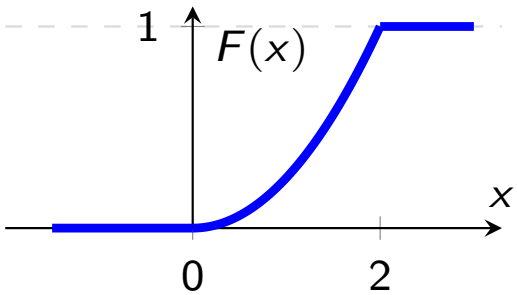
Megoldás:

- Láttuk: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$



- Így $x \in [0,2]$ esetén: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{4}$
- Tehát:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & \text{ha } 2 < x \end{cases}$$



- Így $\mathbb{P}(1 < X < 1.5) = F(1.5) - F(1)$

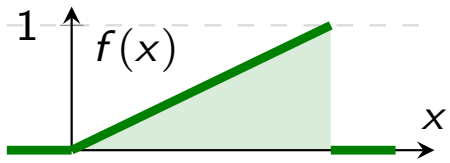
Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba 1 és 1.5 méter közé esik (lásd a 8. diát)!

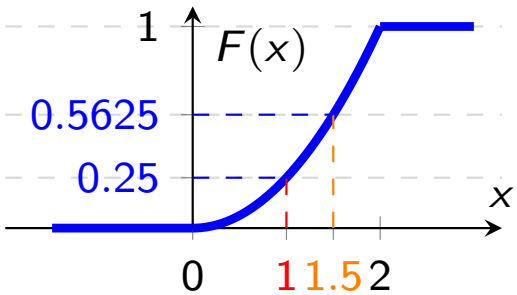
Megoldás:

- Láttuk: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$



- Így $x \in [0,2]$ esetén: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{4}$
- Tehát:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & \text{ha } 2 < x \end{cases}$$



- Így $\mathbb{P}(1 < X < 1.5) = F(1.5) - F(1)$

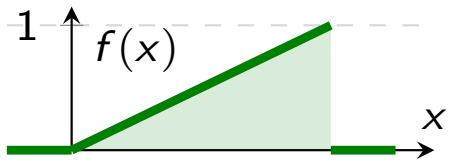
Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba 1 és 1.5 méter közé esik (lásd a 8. diát)!

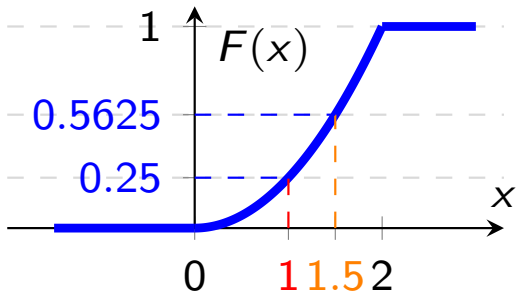
Megoldás:

- Láttuk: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$



- Így $x \in [0,2]$ esetén: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{4}$
- Tehát:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & \text{ha } 2 < x \end{cases}$$



- Így $\mathbb{P}(1 < X < 1.5) = F(1.5) - F(1) = 0.5625 - 0.25$

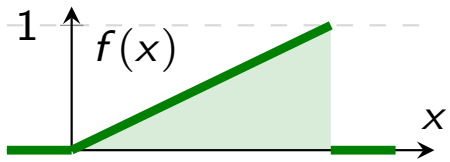
Eloszlásfüggvény: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

Határozzuk meg a 7. dián definiált X változó eloszlásfüggvényét! Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba 1 és 1.5 méter közé esik (lásd a 8. diát)!

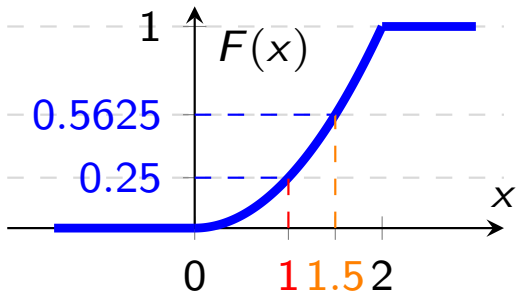
Megoldás:

- Láttuk: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$



- Így $x \in [0,2]$ esetén: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{x} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{4}$
- Tehát:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & \text{ha } 2 < x \end{cases}$$



- Így $\mathbb{P}(1 < X < 1.5) = F(1.5) - F(1) = 0.5625 - 0.25 = 0.3125$

Várható érték, szórásnégyzet

Definíció (Várható érték, szórásnégyzet)

Legyen X egy folytonos valváltozó.

Várható érték, szórásnégyzet

Definíció (Várható érték, szórásnégyzet)

Legyen X egy folytonos valváltozó. Ekkor

- **várható értéke**: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x,$

Várható érték, szórásnégyzet

Definíció (Várható érték, szórásnégyzet)

Legyen X egy folytonos valváltozó. Ekkor

- **várható értéke**: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$,
- **szórásnégyzete:** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$.

Várható érték, szórásnégyzet

Definíció (Várható érték, szórásnégyzet)

Legyen X egy folytonos valváltozó. Ekkor

- **várható értéke**: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$,
- **szórásnégyzete:** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$.

Kapcsolat diszkrét esettel:

Várható érték, szórásnégyzet

Definíció (Várható érték, szórásnégyzet)

Legyen X egy folytonos valváltozó. Ekkor

- **várható értéke**: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x,$
- **szórásnégyzete:** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2].$

Kapcsolat diszkrét esettel:

- $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i\, p_X(x_i)$

Várható érték, szórásnégyzet

Definíció (Várható érték, szórásnégyzet)

Legyen X egy folytonos valváltozó. Ekkor

- **várható értéke**: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$,
- **szórásnégyzete:** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$.

Kapcsolat diszkrét esettel:

- $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i\, p_X(x_i)$, de most Δx hosszú intervallum súlya $\approx f(x)\,\Delta x$

Várható érték, szórásnégyzet

Definíció (Várható érték, szórásnégyzet)

Legyen X egy folytonos valváltozó. Ekkor

- **várható értéke**: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$,
- **szórásnégyzete:** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$.

Kapcsolat diszkrét esettel:

- $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i\, p_X(x_i)$, de most Δx hosszú intervallum súlya $\approx f(x)\,\Delta x$
- Szórásnégyzet definíciója megegyezik

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Várható érték, szórásnégyzet

Definíció (Várható érték, szórásnégyzet)

Legyen X egy folytonos valváltozó. Ekkor

- **várható értéke**: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$,
- **szórásnégyzete:** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$.

Kapcsolat diszkrét esettel:

- $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i\, p_X(x_i)$, de most Δx hosszú intervallum súlya $\approx f(x)\,\Delta x$
- Szórásnégyzet definíciója megegyezik, de a várható értékek integrálok:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Várható érték, szórásnégyzet

Definíció (Várható érték, szórásnégyzet)

Legyen X egy folytonos valváltozó. Ekkor

- **várható értéke**: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$,
- **szórásnégyzete:** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$.

Kapcsolat diszkrét esettel:

- $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i\, p_X(x_i)$, de most Δx hosszú intervallum súlya $\approx f(x)\,\Delta x$
- Szórásnégyzet definíciója megegyezik, de a várható értékek integrálok:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

- Tulajdonságok megegyeznek a diszkrét esetnél látottakkal

Várható érték, szórásnégyzet

Definíció (Várható érték, szórásnégyzet)

Legyen X egy folytonos valváltozó. Ekkor

- **várható értéke**: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$,
- **szórásnégyzete:** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$.

Kapcsolat diszkrét esettel:

- $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i\, p_X(x_i)$, de most Δx hosszú intervallum súlya $\approx f(x)\,\Delta x$
- Szórásnégyzet definíciója megegyezik, de a várható értékek integrálok:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

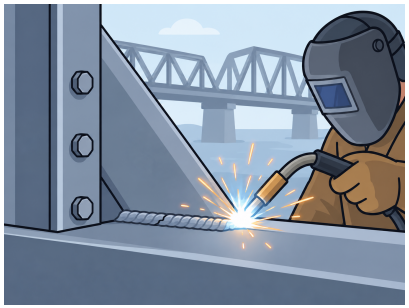
- Tulajdonságok megegyeznek a diszkrét esetnél látottakkal

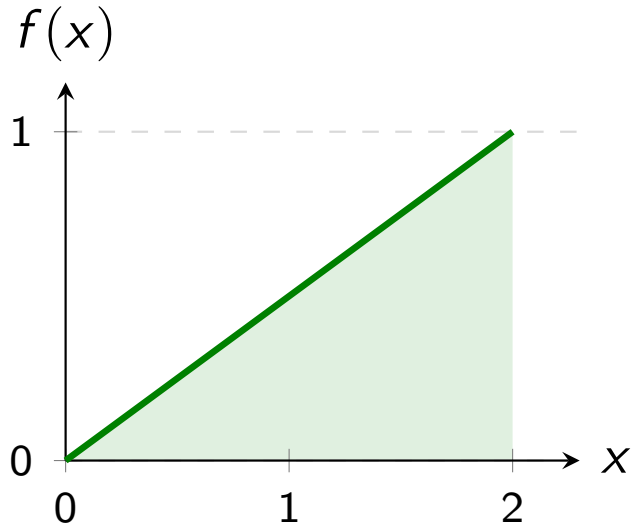
Függvény várható értéke: $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$

Várható érték: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0.

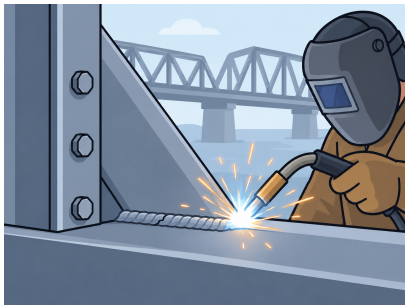


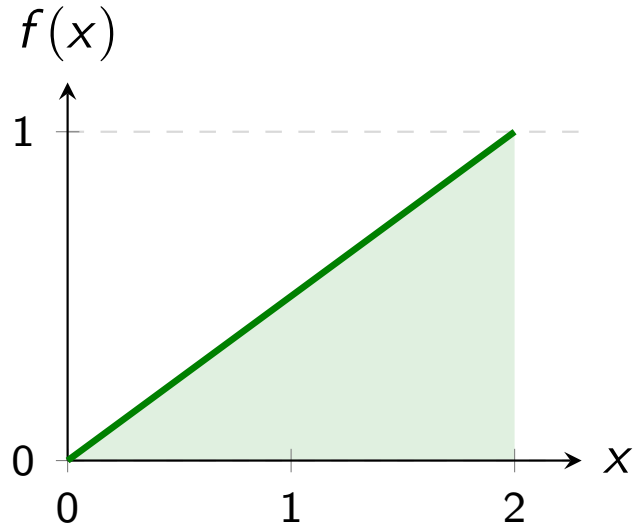


Várható érték: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!

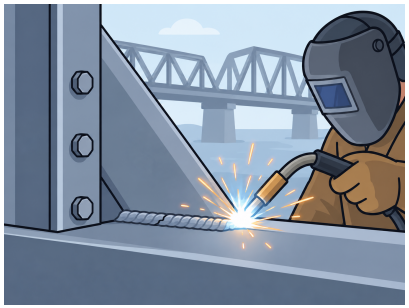




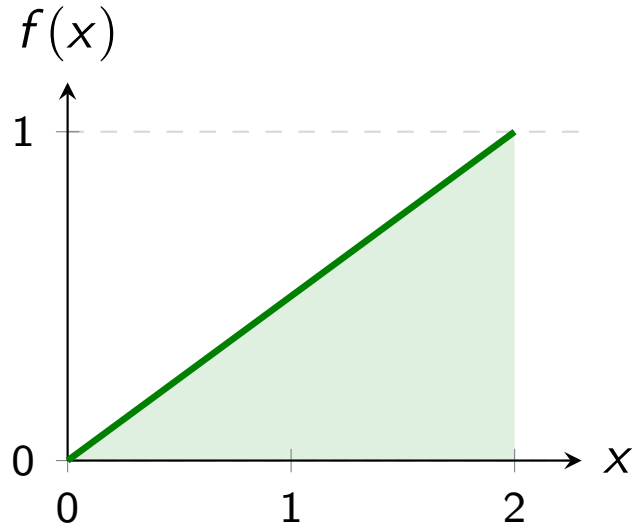
Várható érték: példa

Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!



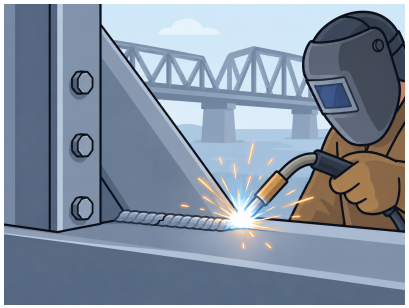
Megoldás: Definíciók alapján sűrűségfüggvényből számolhatók



Várható érték: példa

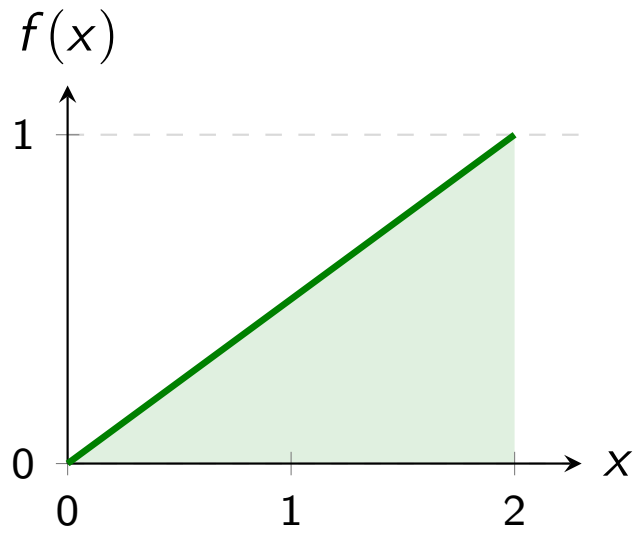
Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!



Megoldás: Definíciók alapján sűrűségfüggvényből számolhatók

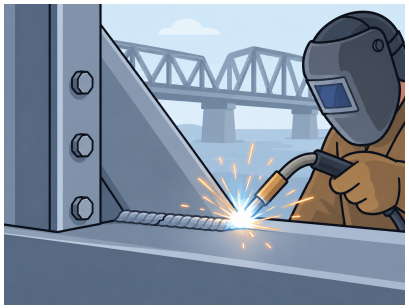
1. $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$



Várható érték: példa

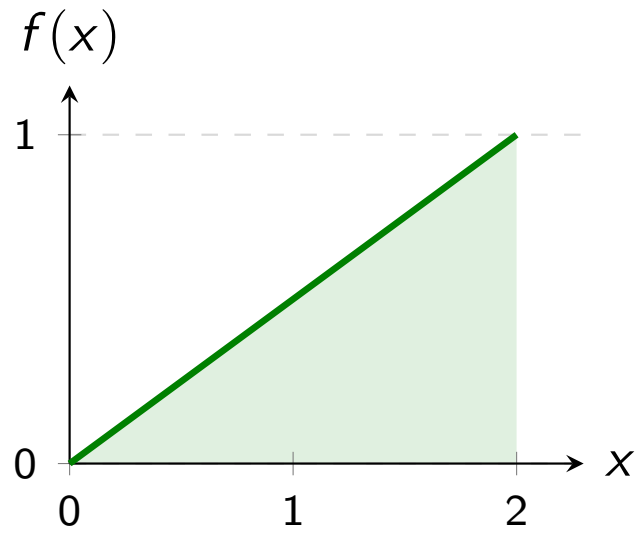
Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!



Megoldás: Definíciók alapján sűrűségfüggvényből számolhatók

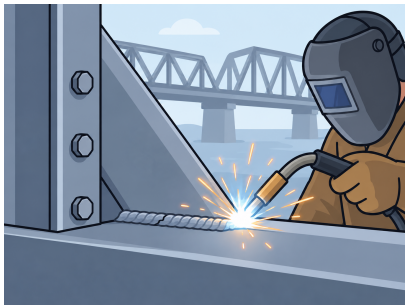
1. $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2$



Várható érték: példa

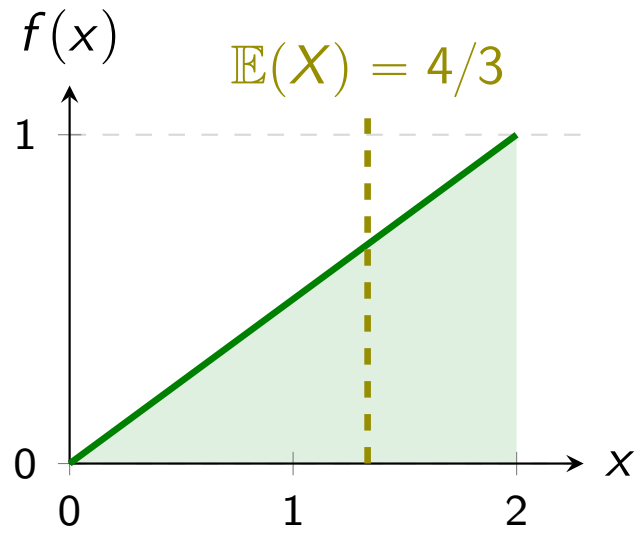
Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!



Megoldás: Definíciók alapján sűrűségfüggvényből számolhatók

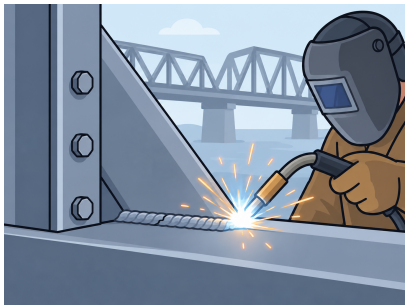
1. $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$



Várható érték: példa

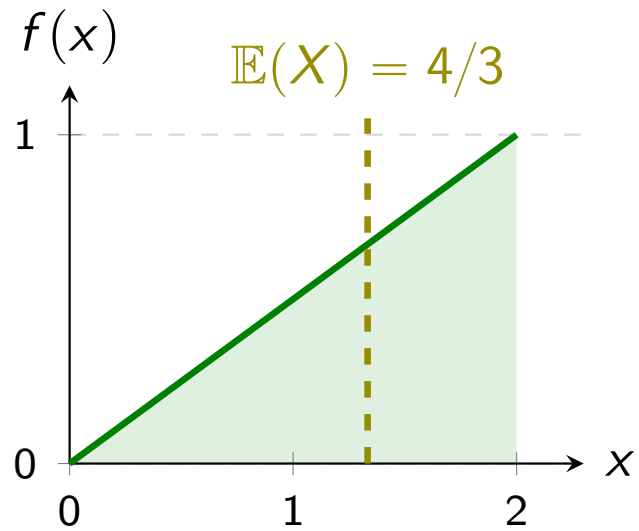
Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!



Megoldás: Definíciók alapján sűrűségfüggvényből számolhatók

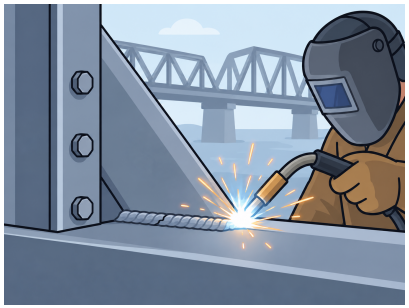
1. $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$
2. $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$



Várható érték: példa

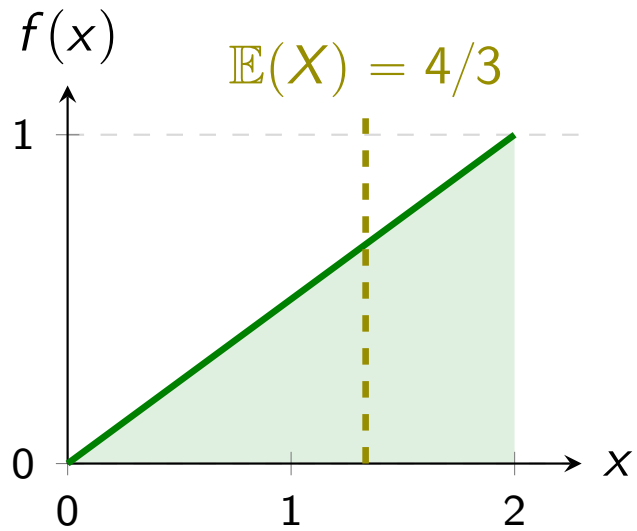
Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!



Megoldás: Definíciók alapján sűrűségfüggvényből számolhatók

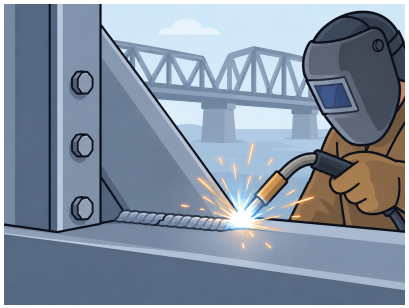
1. $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$
2. $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2$



Várható érték: példa

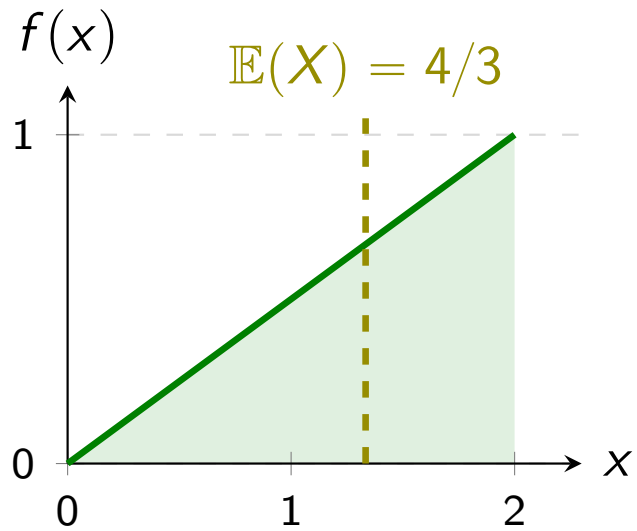
Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!



Megoldás: Definíciók alapján sűrűségfüggvényből számolhatók

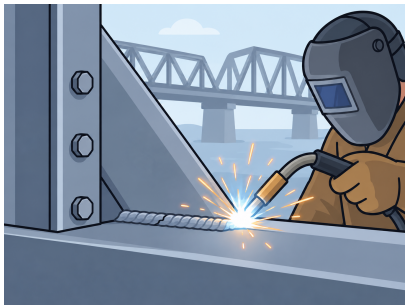
1. $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$
2. $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$



Várható érték: példa

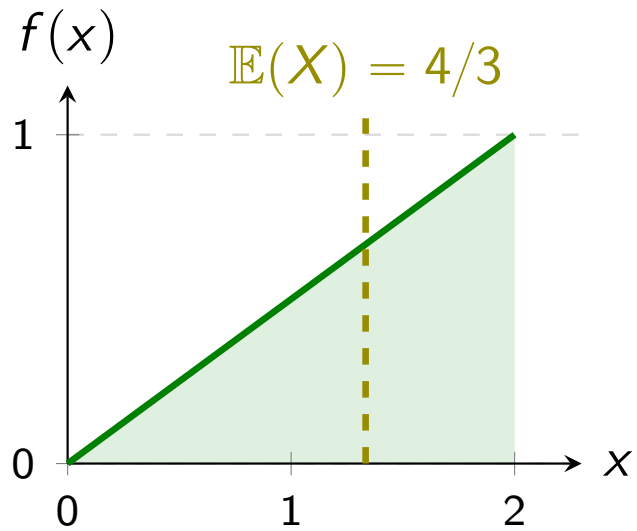
Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!



Megoldás: Definíciók alapján sűrűségfüggvényből számolhatók

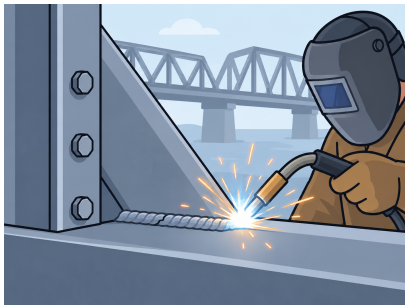
1. $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$
2. $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$
3. $\mathrm{Var}(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$



Várható érték: példa

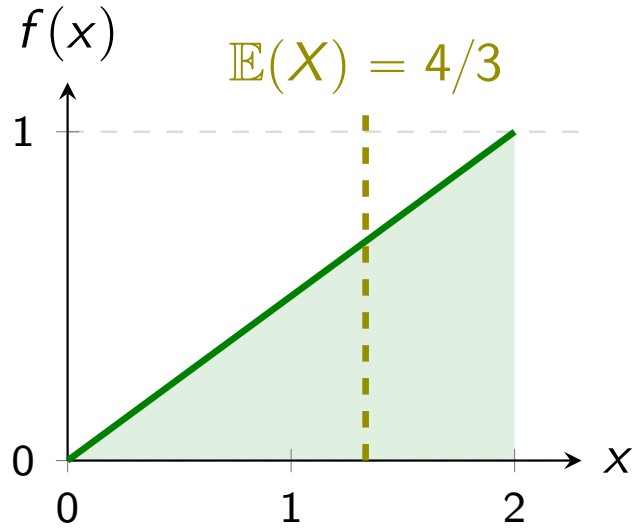
Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!



Megoldás: Definíciók alapján sűrűségfüggvényből számolhatók

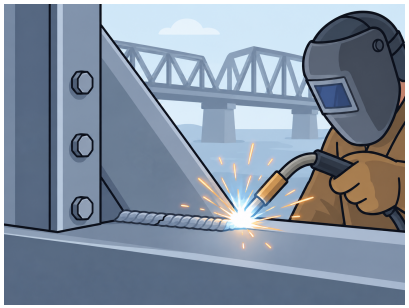
1. $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$
2. $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$
3. $\mathrm{Var}(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$



Várható érték: példa

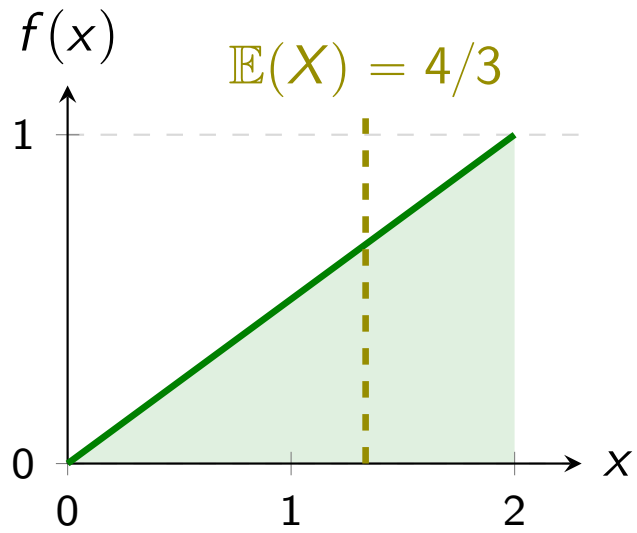
Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!



Megoldás: Definíciók alapján sűrűségfüggvényből számolhatók

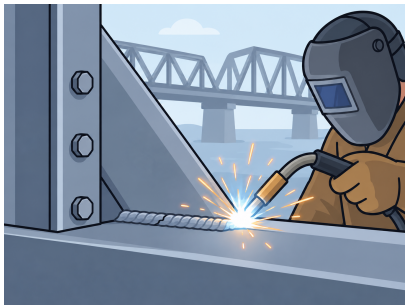
1. $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$
2. $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$
3. $\mathrm{Var}(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$
4. $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{2}{9}}$



Várható érték: példa

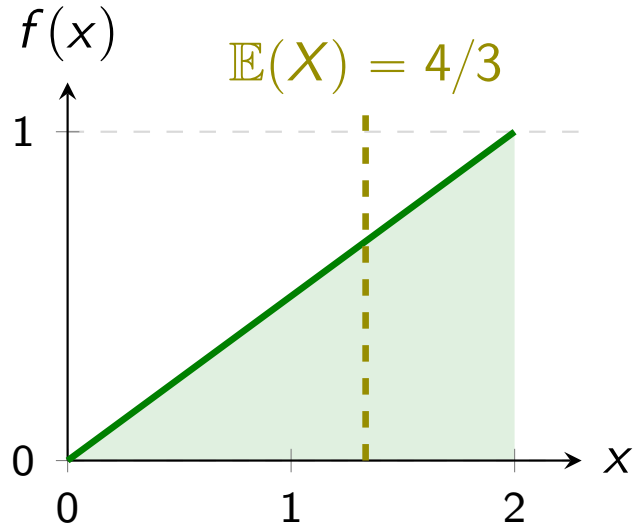
Feladat (Hegesztési hiba helye)

A 2 méteres varraton a hiba helyének sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{x}{2}$ a $[0, 2]$ intervallumon, egyébként 0. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!



Megoldás: Definíciók alapján sűrűségfüggvényből számolhatók

1. $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$
2. $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$
3. $\mathrm{Var}(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$
4. $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$



1 Folytonos valószínűségi változók

2 Nevezetes folytonos eloszlások

Nevezetes eloszlások

Az alábbi nevezetes folytonos eloszlásokat tanuljuk:

Nevezetes eloszlások

Az alábbi nevezetes folytonos eloszlásokat tanuljuk:

1. **Egyenletes eloszlás:**

Nevezetes eloszlások

Az alábbi nevezetes folytonos eloszlásokat tanuljuk:

1. **Egyenletes eloszlás:**
   Egy véges intervallumon az azonos hosszúságú részek azonos esélyűek

Nevezetes eloszlások

Az alábbi nevezetes folytonos eloszlásokat tanuljuk:

1. **Egyenletes eloszlás:**
   Egy véges intervallumon az azonos hosszúságú részek azonos esélyűek

2. **Exponenciális eloszlás:**

Nevezetes eloszlások

Az alábbi nevezetes folytonos eloszlásokat tanuljuk:

1. **Egyenletes eloszlás:**
   Egy véges intervallumon az azonos hosszúságú részek azonos esélyűek

2. **Exponenciális eloszlás:**
   Várakozási idő vagy élettartam, állandó intenzitás mellett

Nevezetes eloszlások

Az alábbi nevezetes folytonos eloszlásokat tanuljuk:

1. **Egyenletes eloszlás:**
   Egy véges intervallumon az azonos hosszúságú részek azonos esélyűek

2. **Exponenciális eloszlás:**
   Várakozási idő vagy élettartam, állandó intenzitás mellett
   A hátralévő idő eloszlása nem függ az eltelt időtől

Nevezetes eloszlások

Az alábbi nevezetes folytonos eloszlásokat tanuljuk:

1. **Egyenletes eloszlás:**
   Egy véges intervallumon az azonos hosszúságú részek azonos esélyűek

2. **Exponenciális eloszlás:**
   Várakozási idő vagy élettartam, állandó intenzitás mellett
   A hátralévő idő eloszlása nem függ az eltelt időtől

3. **Normális eloszlás:**

Nevezetes eloszlások

Az alábbi nevezetes folytonos eloszlásokat tanuljuk:

1. **Egyenletes eloszlás:**
   Egy véges intervallumon az azonos hosszúságú részek azonos esélyűek
2. **Exponenciális eloszlás:**
   Várakozási idő vagy élettartam, állandó intenzitás mellett
   A hátralévő idő eloszlása nem függ az eltelt időtől
3. **Normális eloszlás:**
   Egy középérték körül szimmetrikusan szóródó mennyiség modellje

Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás)

Az X valváltozó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

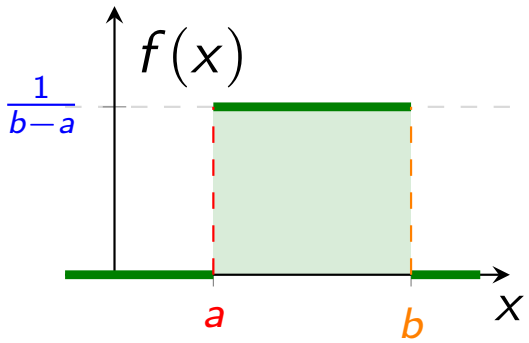
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás)

Az X valváltozó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

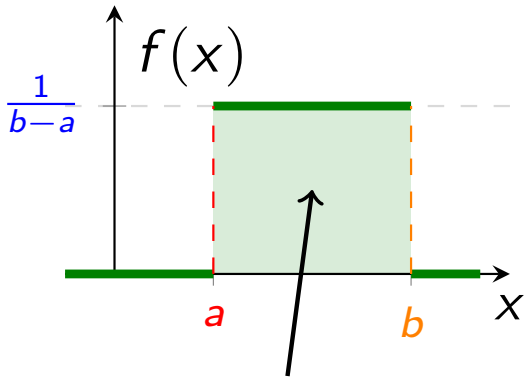


Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás)

Az X valváltozó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



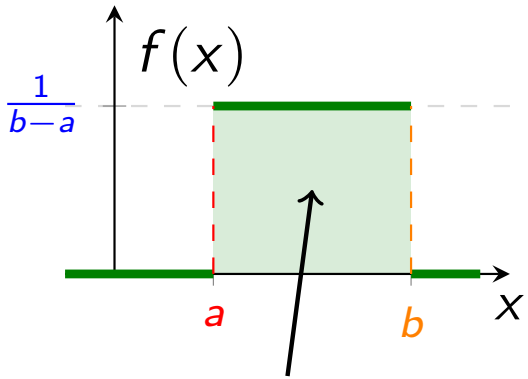
Terület: $(b-a) \cdot \dfrac{1}{b-a} = 1$

Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás)

Az X valváltozó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Terület: $(b-a) \cdot \dfrac{1}{b-a} = 1$

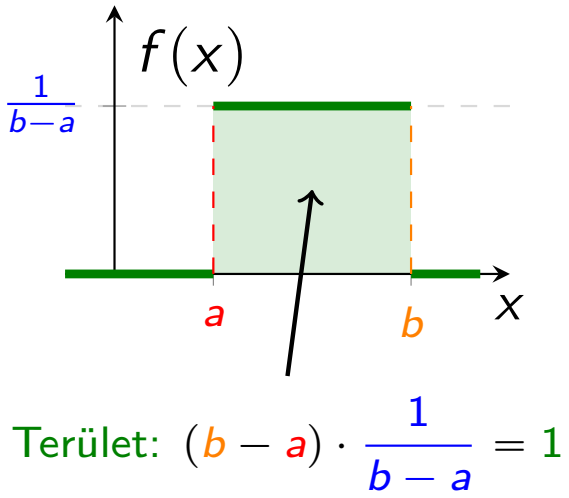
- Jelölés: $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$ vagy $X \sim \mathrm{U}(a, b)$

Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás)

Az X valváltozó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



- Jelölés: $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$ vagy $X \sim \mathrm{U}(a, b)$

Példa:

- $X =$ hol áll meg egy K kerületű szerencsekerék

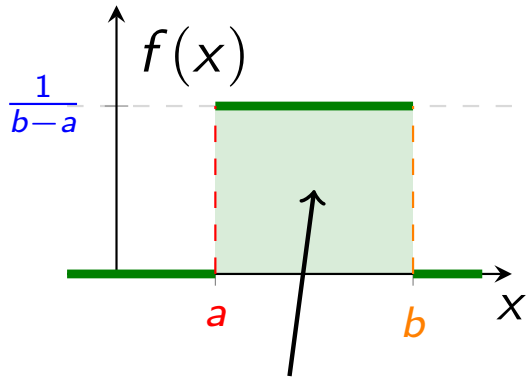


Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás)

Az X valváltozó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Terület: $(b-a) \cdot \dfrac{1}{b-a} = 1$

- Jelölés: $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$ vagy $X \sim \mathrm{U}(a, b)$

Példa:

- $X =$ hol áll meg egy K kerületű szerencsekerék $\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, K)$

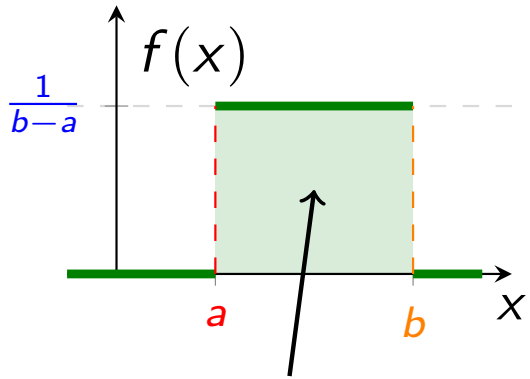


Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás)

Az X valváltozó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Terület: $(b-a) \cdot \dfrac{1}{b-a} = 1$

- Jelölés: $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$ vagy $X \sim \mathrm{U}(a, b)$

Példa:

- $X =$ hol áll meg egy K kerületű szerencsekerék $\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, K)$
- $Y =$ egy ℓ hosszú gerendán egyenletesen választott pont helye

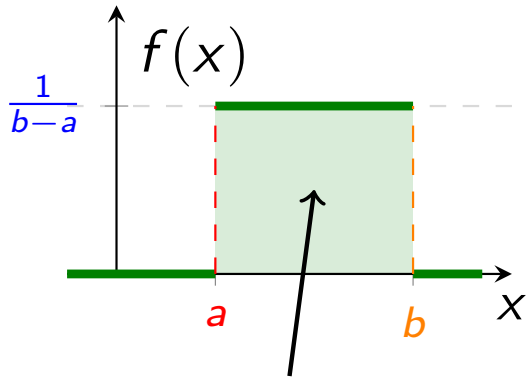


Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás)

Az X valváltozó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Terület: $(b-a) \cdot \dfrac{1}{b-a} = 1$

- Jelölés: $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$ vagy $X \sim \mathrm{U}(a, b)$

Példa:

- $X =$ hol áll meg egy K kerületű szerencsekerék $\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, K)$
- $Y =$ egy ℓ hosszú gerendán egyenletesen választott pont helye $\Rightarrow Y \sim \mathrm{UNI}(0, \ell)$



Egyenletes eloszlás: eloszlásfüggvény

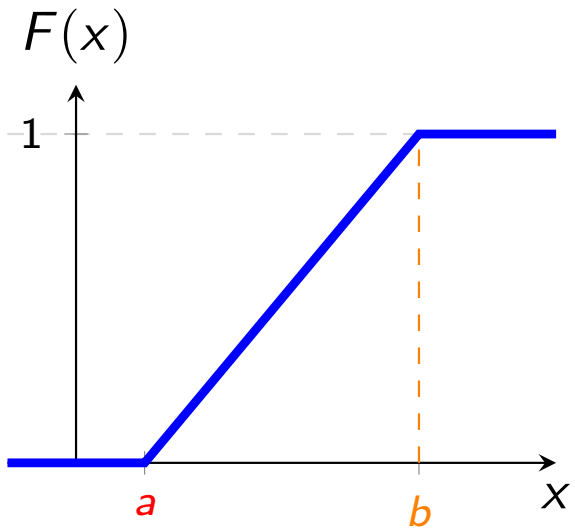
A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & \text{ha } b < x \end{cases}$$

Egyenletes eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$, akkor

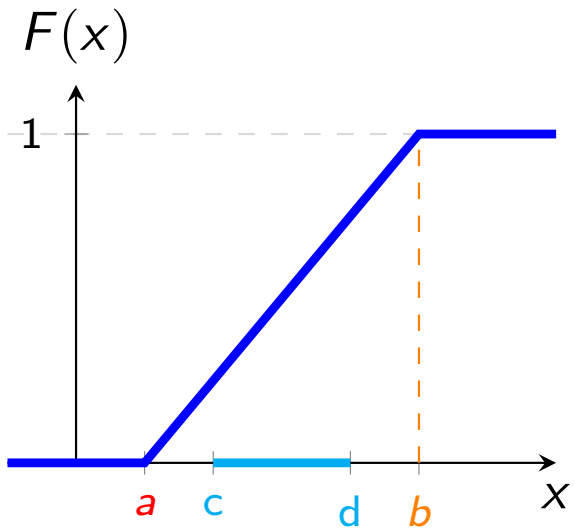
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & \text{ha } b < x \end{cases}$$



Egyenletes eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & \text{ha } b < x \end{cases}$$



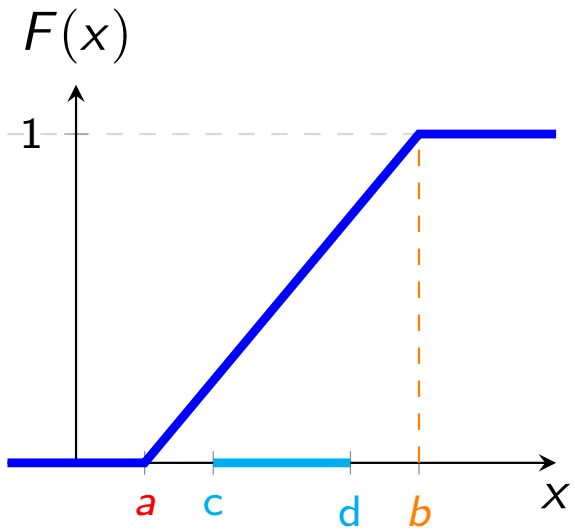
Következmény (Geometriai jelentés)

Ha $[c, d] \subseteq [a, b]$, akkor $\mathbb{P}(c < X < d) = \dfrac{d-c}{b-a}$

Egyenletes eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & \text{ha } b < x \end{cases}$$



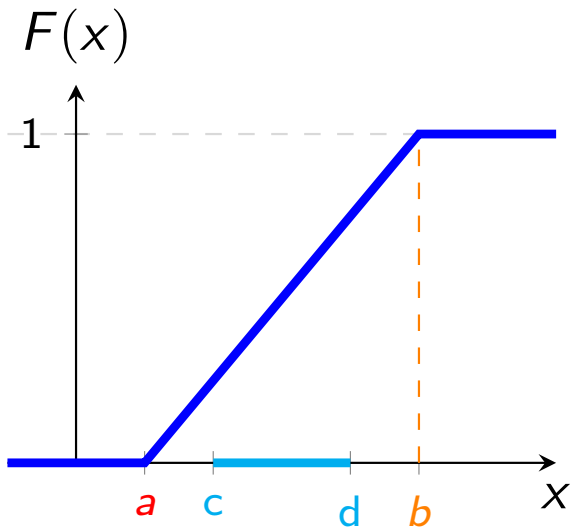
Következmény (Geometriai jelentés)

Ha $[c, d] \subseteq [a, b]$, akkor $\mathbb{P}(c < X < d) = \dfrac{d-c}{b-a} = \dfrac{\text{kedvező hossz}}{\text{teljes hossz}}$.

Egyenletes eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & \text{ha } b < x \end{cases}$$



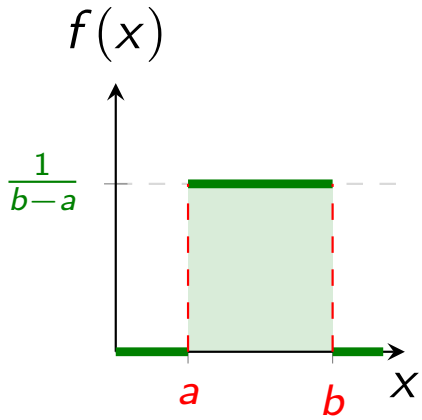
Következmény (Geometriai jelentés)

Ha $[c, d] \subseteq [a, b]$, akkor $\mathbb{P}(c < X < d) = \dfrac{d-c}{b-a} = \dfrac{\text{kedvező hossz}}{\text{teljes hossz}}$.

Megjegyzés: Ha a kérdezett intervallum kilóg $[a, b]$-ből, akkor csak a metszetének hosszát vesszük

Egyenletes eloszlás: várható érték, szórás

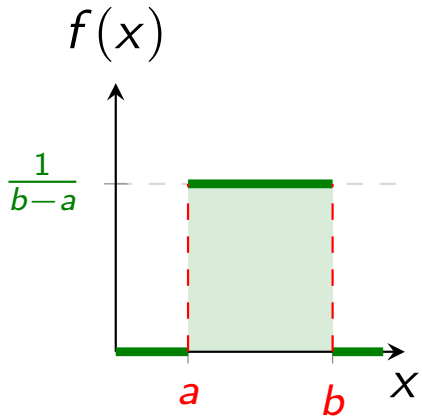
Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$



Egyenletes eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$

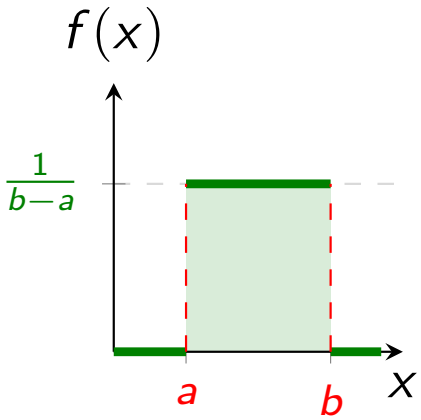
- $\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x$



Egyenletes eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$

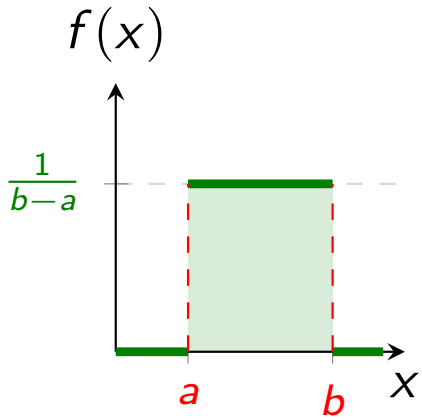
- $\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$



Egyenletes eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$

- $\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

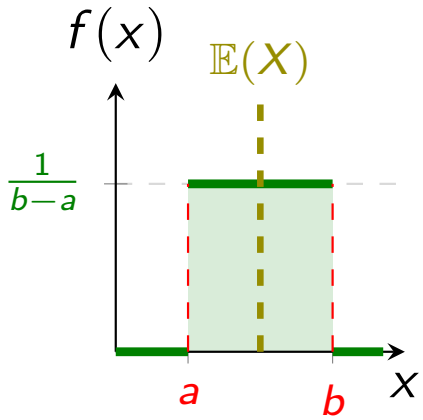


Egyenletes eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$

- $\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

  $\Rightarrow$ a **várható érték** az intervallum közepe

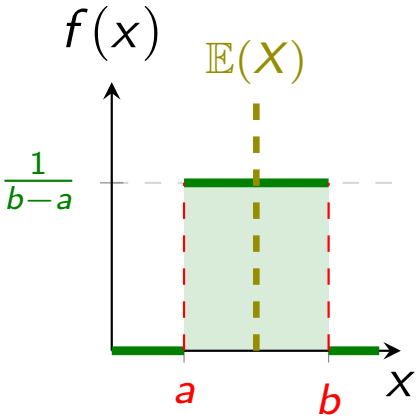


Egyenletes eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$

- $\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

  $\Rightarrow$ a **várható érték** az intervallum közepe



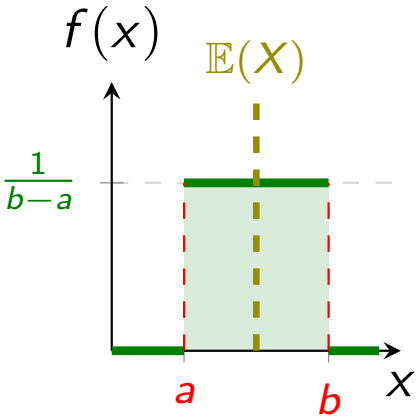
- $\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x$

Egyenletes eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$

- $\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

  $\Rightarrow$ a **várható érték** az intervallum közepe



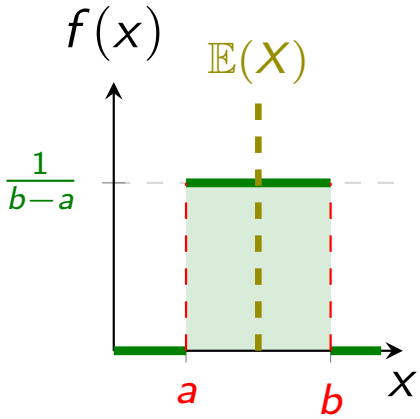
- $\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$

Egyenletes eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$

- $\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

  $\Rightarrow$ a **várható érték** az intervallum közepe



- $\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$

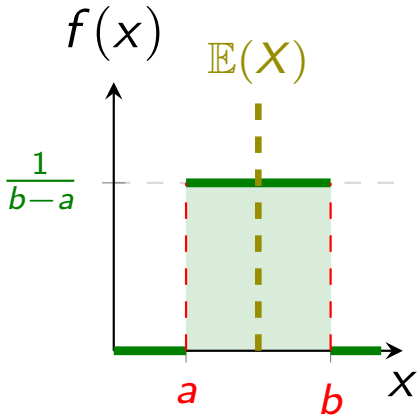
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Egyenletes eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$

- $\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

  $\Rightarrow$ a **várható érték** az intervallum közepe

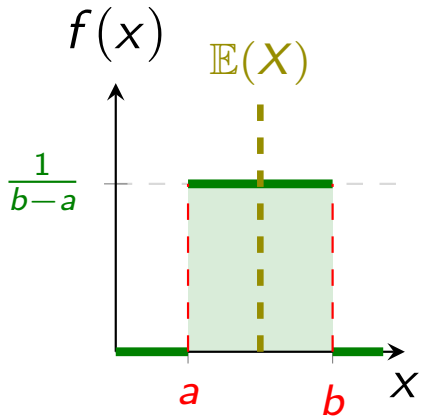


- $\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$

- $\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

Egyenletes eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$



- $\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

  $\Rightarrow$ a **várható érték** az intervallum közepe

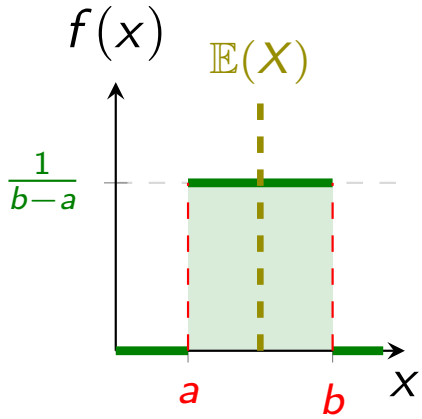
- $\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$

- $\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

- $\mathbb{D}(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

Egyenletes eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{UNI}(a, b)$



- $\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

  $\Rightarrow$ a **várható érték** az intervallum közepe

- $\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$

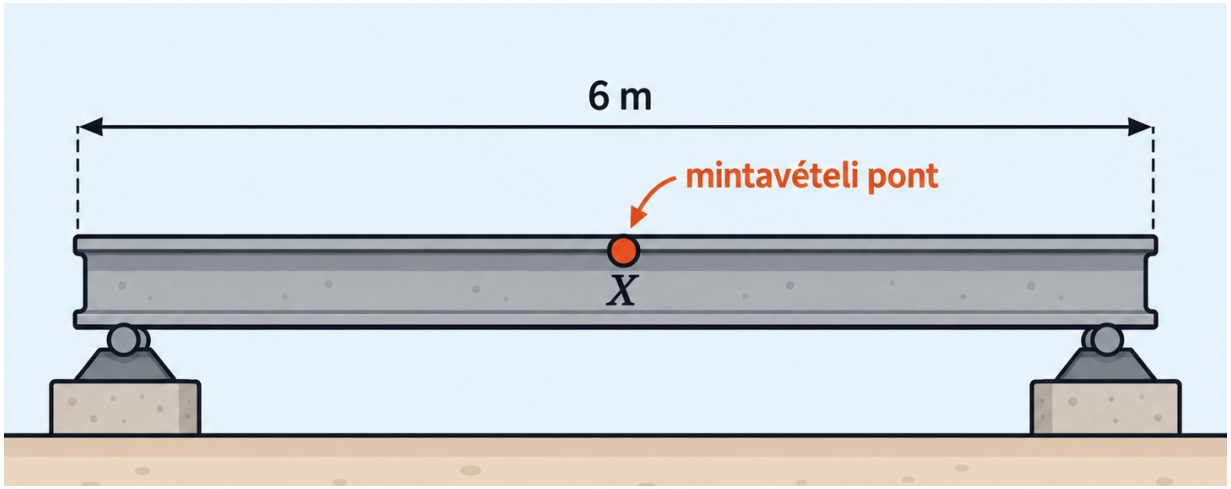
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

- $\mathbb{D}(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$ $\Rightarrow$ a **szórás** az intervallum hosszával arányos

Egyenletes eloszlás: példa

Feladat (Mintavételi pont helye egy gerendán)

Egy 6 méter hosszú gerendán egyenletesen választunk egy mintavételi pontot.

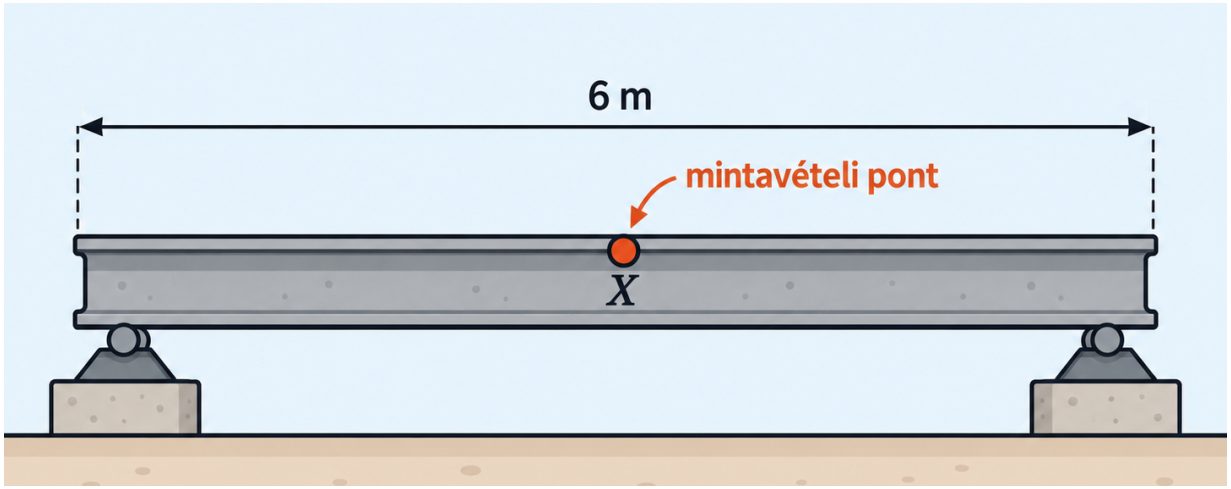


Egyenletes eloszlás: példa

Feladat (Mintavételi pont helye egy gerendán)

Egy 6 méter hosszú gerendán egyenletesen választunk egy mintavételi pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a pont

a) a gerenda középső harmadán helyezkedik el?



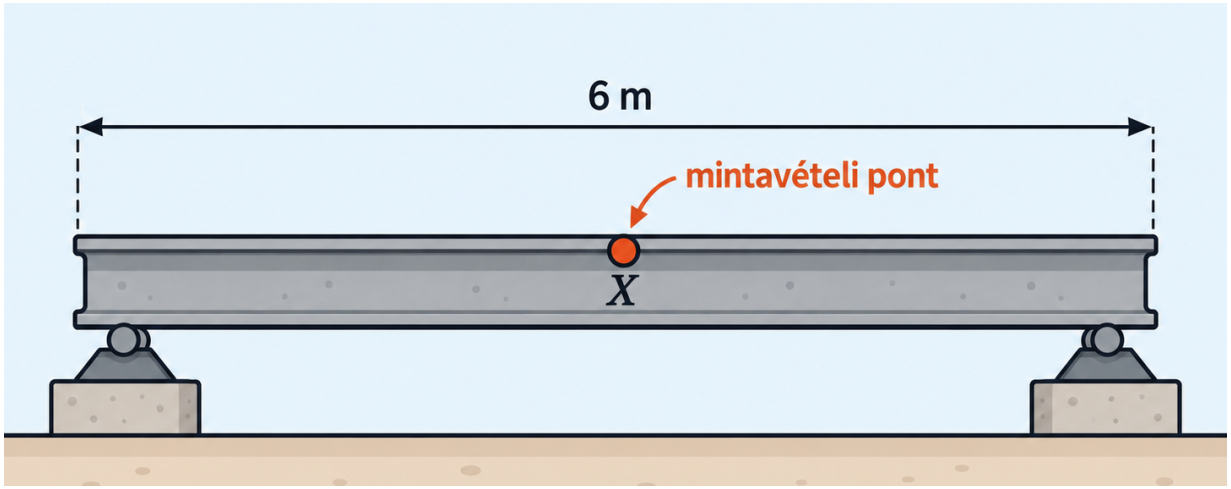
Egyenletes eloszlás: példa

Feladat (Mintavételi pont helye egy gerendán)

Egy 6 méter hosszú gerendán egyenletesen választunk egy mintavételi pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a pont

a. a gerenda középső harmadán helyezkedik el?

b. a gerenda valamelyik végétől legfeljebb 0.5 méterre van?



Egyenletes eloszlás: példa

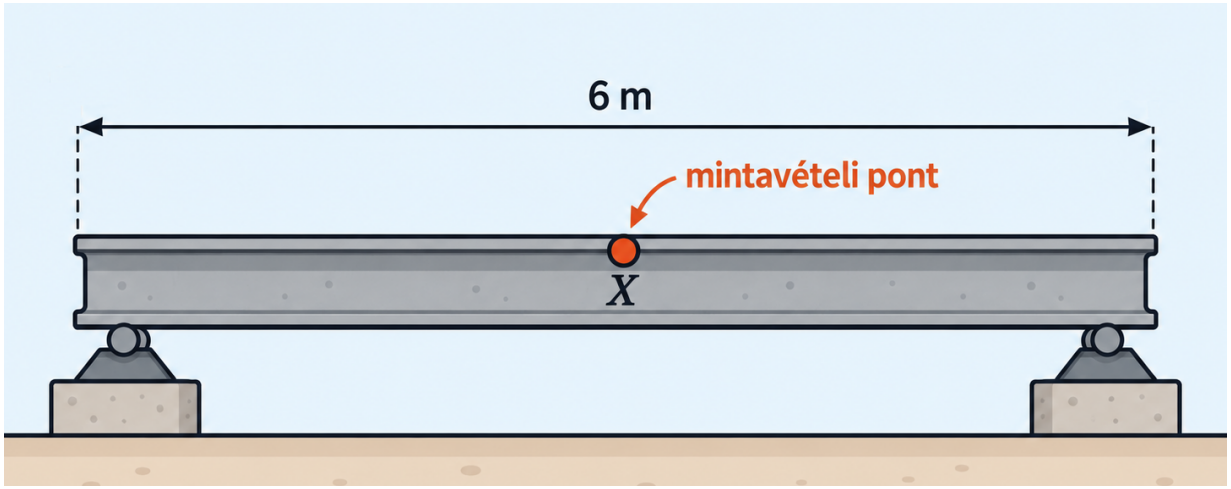
Feladat (Mintavételi pont helye egy gerendán)

Egy 6 méter hosszú gerendán egyenletesen választunk egy mintavételi pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a pont

a. a gerenda középső harmadán helyezkedik el?

b. a gerenda valamelyik végétől legfeljebb 0.5 méterre van?

c. Mennyi a pontnak a gerenda bal végétől mért helyének várható értéke és szórásnégyzete?

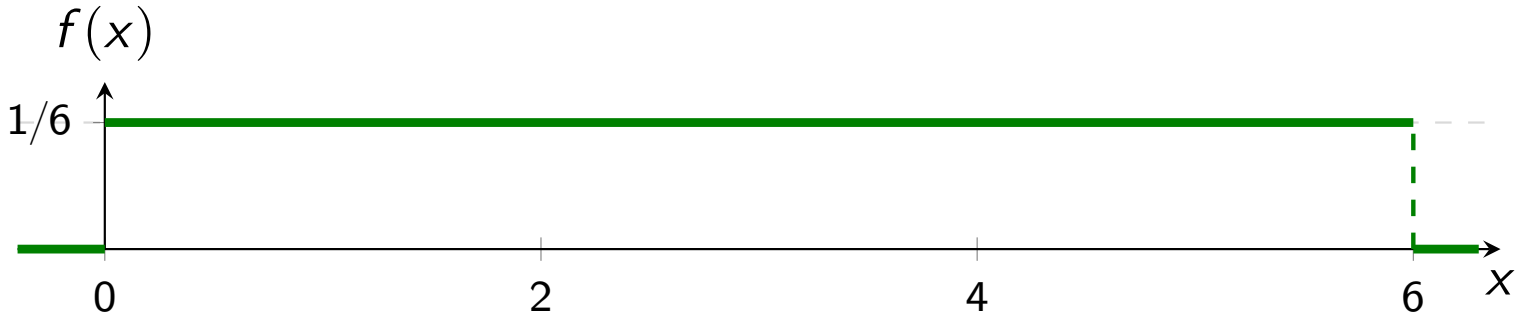


Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága

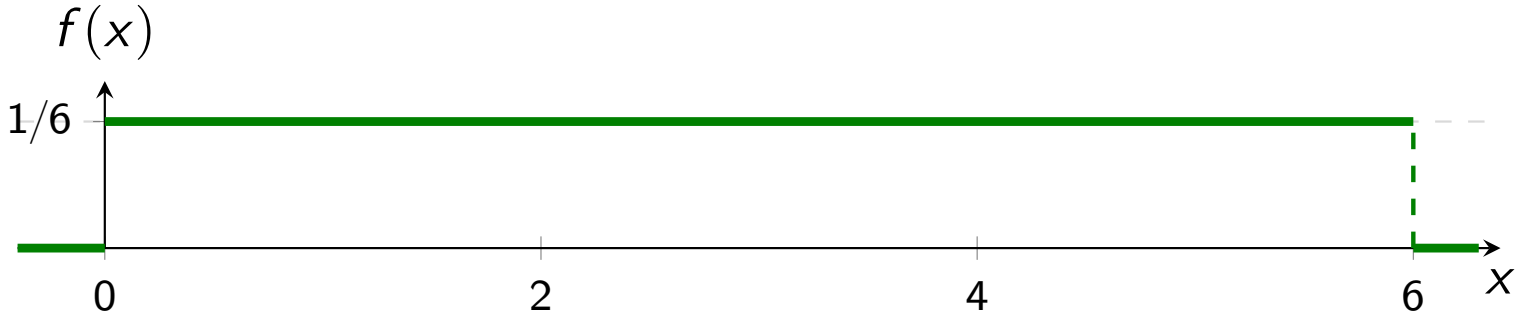
Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6)$



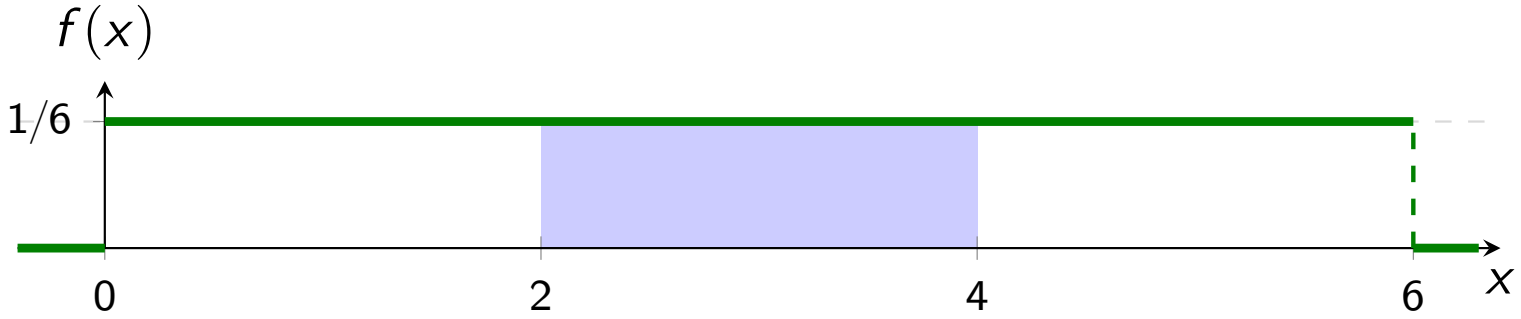
Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



Egyenletes eloszlás: példa

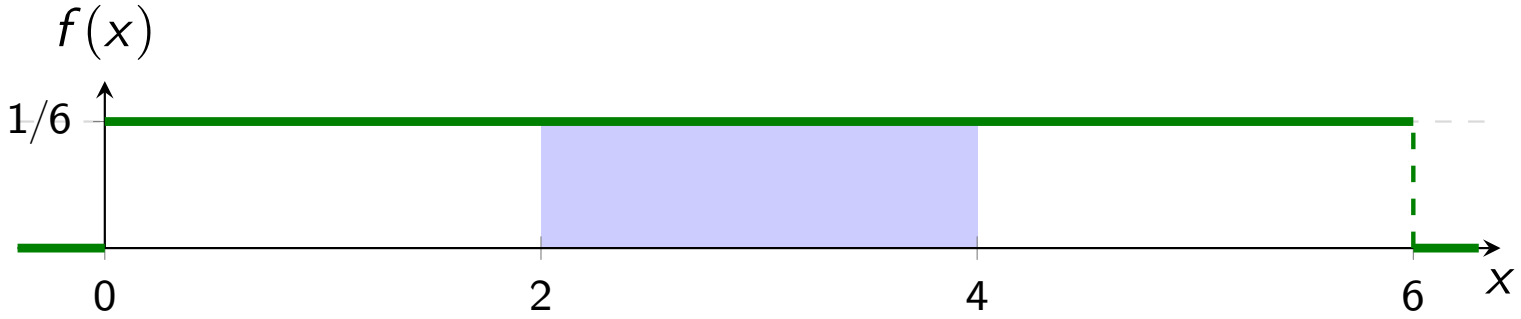
Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



a) A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4)$

Egyenletes eloszlás: példa

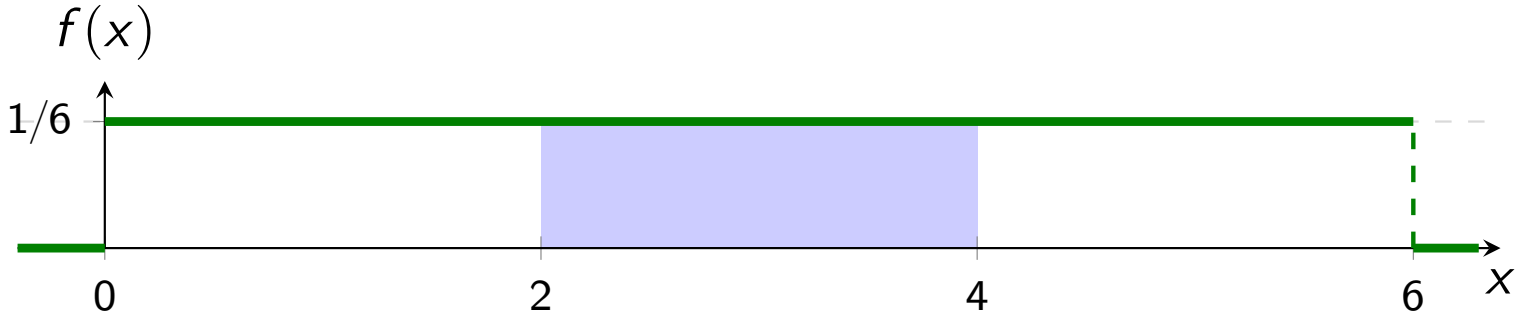
Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



a) A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{4-2}{6}$

Egyenletes eloszlás: példa

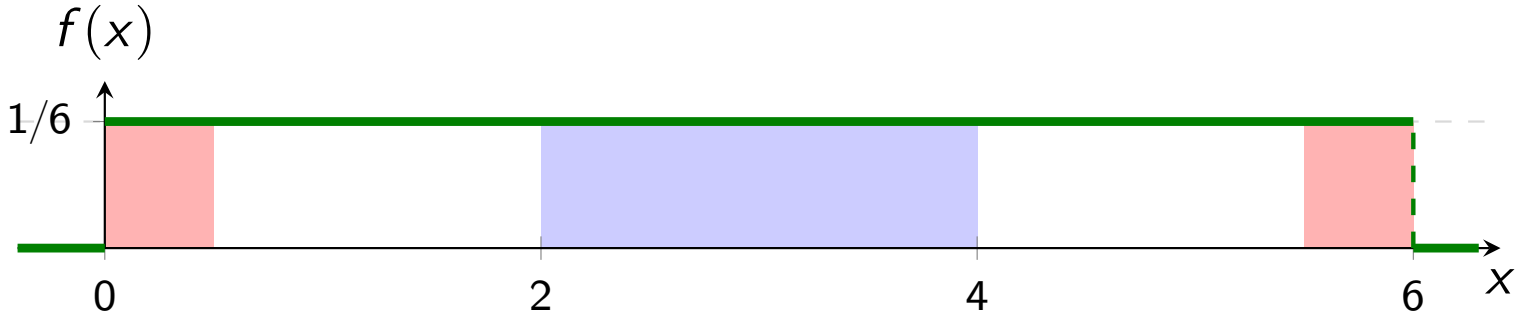
Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



a) A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



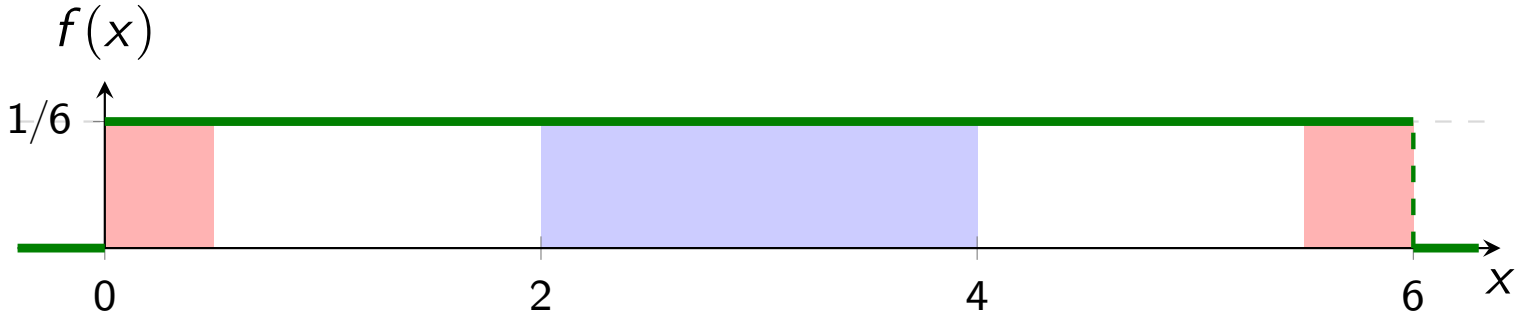
a. A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

b. Valamelyik vég közelében:

$\mathbb{P}(\{X \leqslant 0.5\} \cup \{X \geqslant 5.5\})$

Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



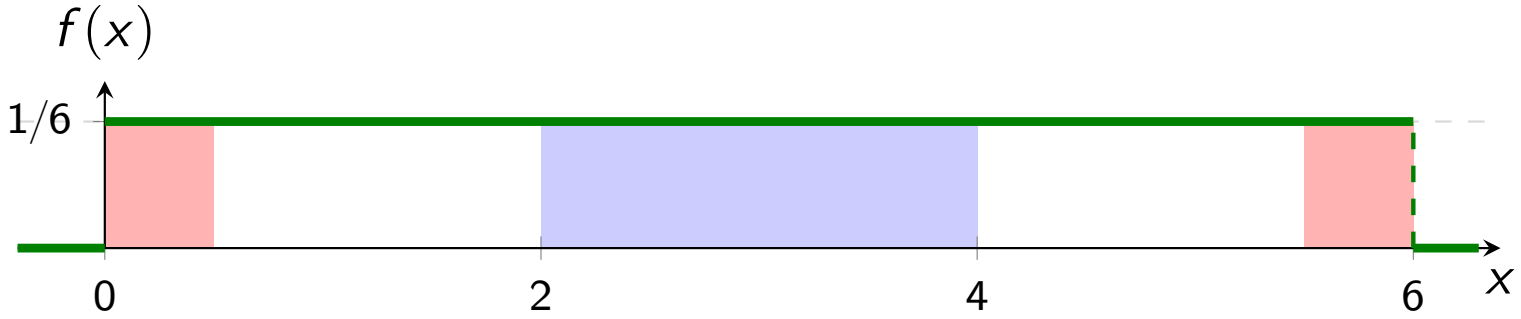
a. A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

b. Valamelyik vég közelében:

$$\mathbb{P}(\{X \leqslant 0.5\} \cup \{X \geqslant 5.5\}) = \frac{0.5}{6} + \frac{0.5}{6}$$

Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



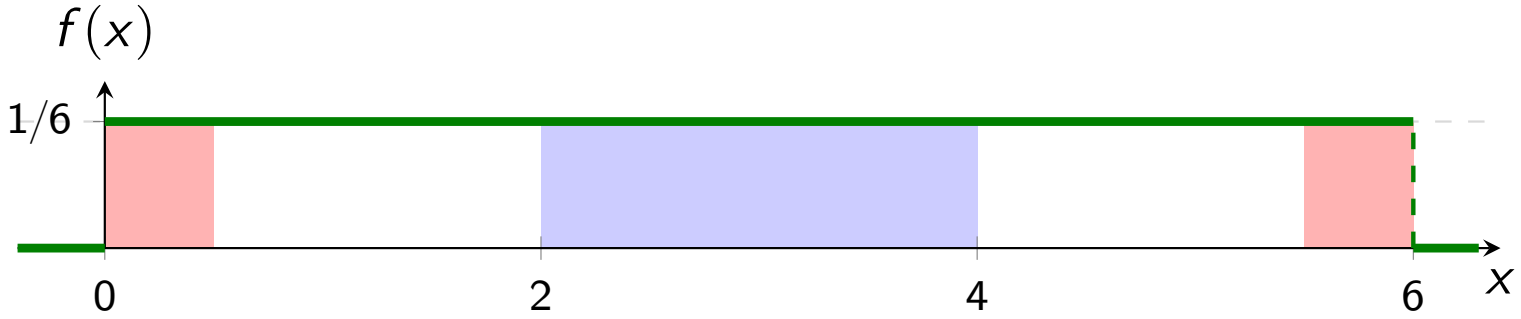
a. A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

b. Valamelyik vég közelében:

$$\mathbb{P}(\{X \leqslant 0.5\} \cup \{X \geqslant 5.5\}) = \frac{0.5}{6} + \frac{0.5}{6} = \frac{1}{6}$$

Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



a. A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

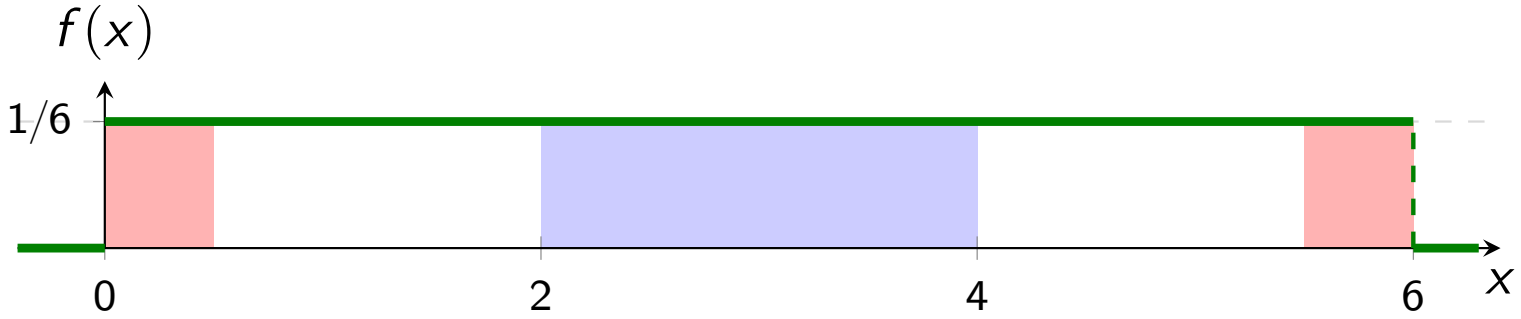
b. Valamelyik vég közelében:

$$\mathbb{P}(\{X \leqslant 0.5\} \cup \{X \geqslant 5.5\}) = \frac{0.5}{6} + \frac{0.5}{6} = \frac{1}{6}$$

c. Várható érték és szórás

Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



a. A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

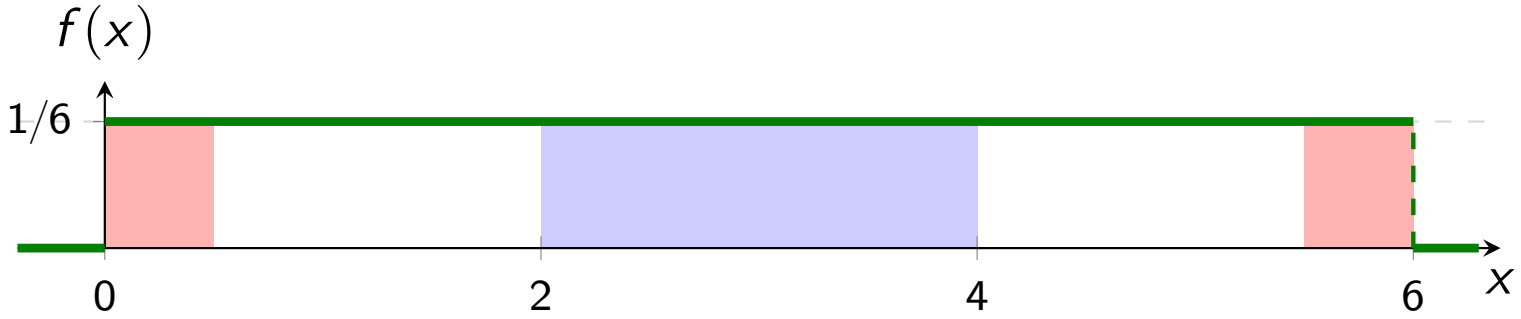
b. Valamelyik vég közelében:

$$\mathbb{P}(\{X \leqslant 0.5\} \cup \{X \geqslant 5.5\}) = \frac{0.5}{6} + \frac{0.5}{6} = \frac{1}{6}$$

c. Várható érték és szórás (a 18. dián tanult képletek alapján):

Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



a. A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

b. Valamelyik vég közelében:

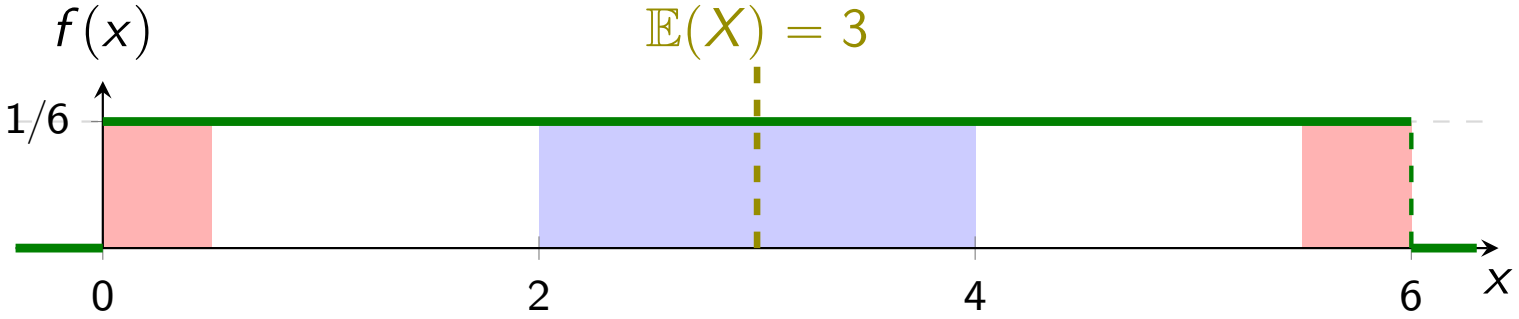
$$\mathbb{P}(\{X \leqslant 0.5\} \cup \{X \geqslant 5.5\}) = \frac{0.5}{6} + \frac{0.5}{6} = \frac{1}{6}$$

c. Várható érték és szórás (a 18. dián tanult képletek alapján):

$$\mathbb{E}(X) = \frac{0+6}{2}$$

Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



a. A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

b. Valamelyik vég közelében:

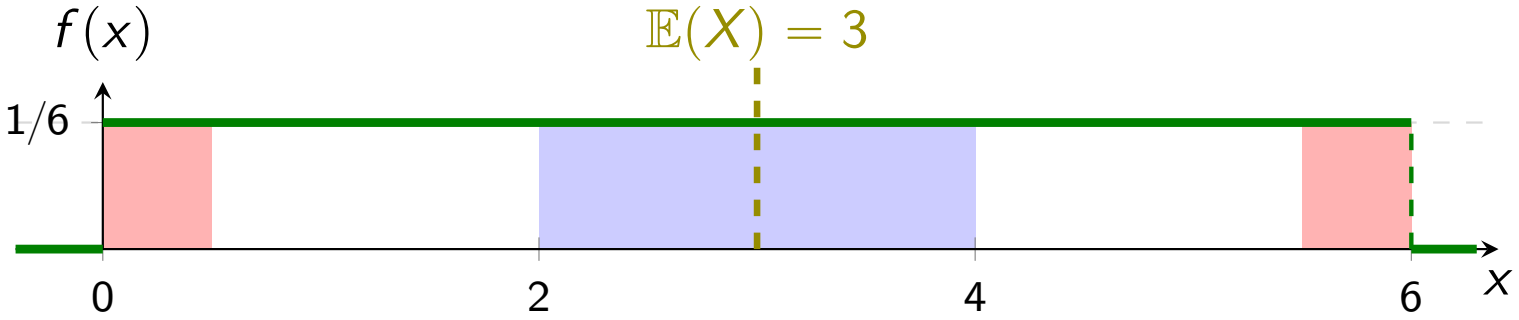
$$\mathbb{P}(\{X \leqslant 0.5\} \cup \{X \geqslant 5.5\}) = \frac{0.5}{6} + \frac{0.5}{6} = \frac{1}{6}$$

c. Várható érték és szórás (a 18. dián tanult képletek alapján):

$$\mathbb{E}(X) = \frac{0+6}{2} = 3,$$

Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



a. A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

b. Valamelyik vég közelében:

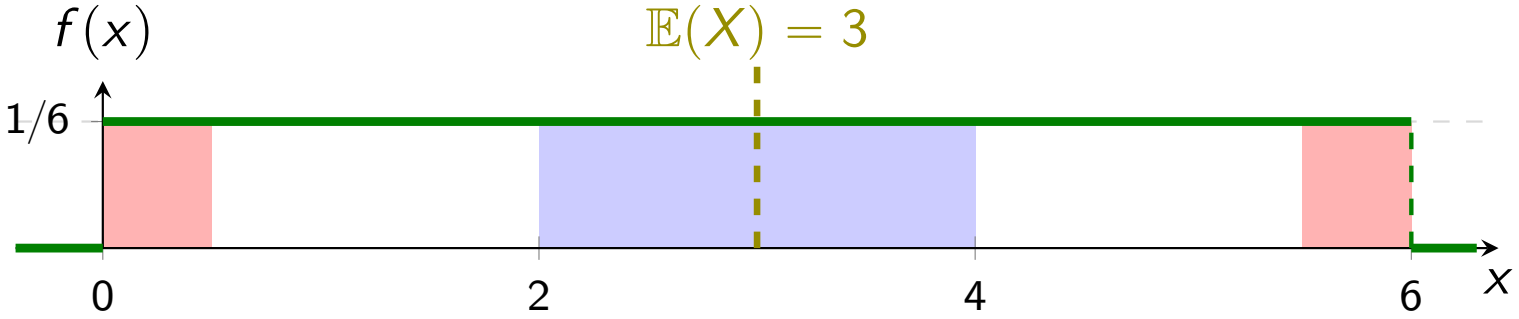
$$\mathbb{P}(\{X \leqslant 0.5\} \cup \{X \geqslant 5.5\}) = \frac{0.5}{6} + \frac{0.5}{6} = \frac{1}{6}$$

c. Várható érték és szórás (a 18. dián tanult képletek alapján):

$$\mathbb{E}(X) = \frac{0+6}{2} = 3, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(6-0)^2}{12}$$

Egyenletes eloszlás: példa

Megoldás: Legyen X a pontnak a bal végtől mért távolsága
$\Rightarrow X \sim \mathrm{UNI}(0, 6) \Rightarrow$ a valószínűségek intervallum hosszakból számolhatók



a. A középső harmad valószínűsége: $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

b. Valamelyik vég közelében:

$$\mathbb{P}(\{X \leqslant 0.5\} \cup \{X \geqslant 5.5\}) = \frac{0.5}{6} + \frac{0.5}{6} = \frac{1}{6}$$

c. Várható érték és szórás (a 18. dián tanult képletek alapján):

$$\mathbb{E}(X) = \frac{0+6}{2} = 3, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(6-0)^2}{12} = 3$$

Exponenciális eloszlás

Definíció (Exponenciális eloszlás)

Az X valváltozó $\lambda > 0$ paraméterű **exponenciális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye

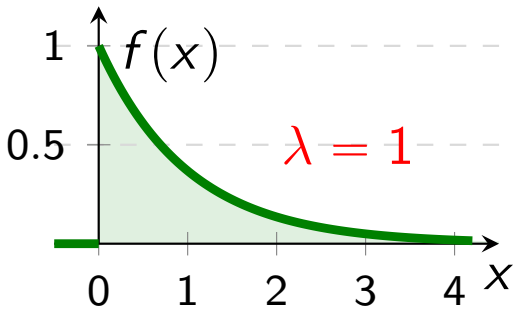
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás

Definíció (Exponenciális eloszlás)

Az X valváltozó $\lambda > 0$ paraméterű **exponenciális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

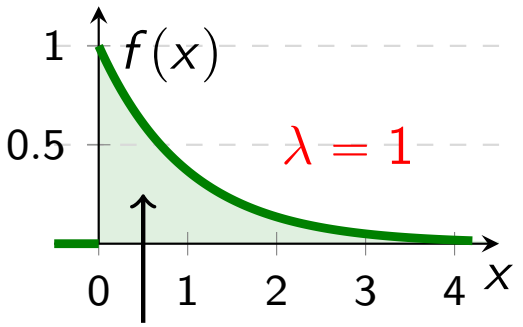


Exponenciális eloszlás

Definíció (Exponenciális eloszlás)

Az X valváltozó $\lambda > 0$ paraméterű **exponenciális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



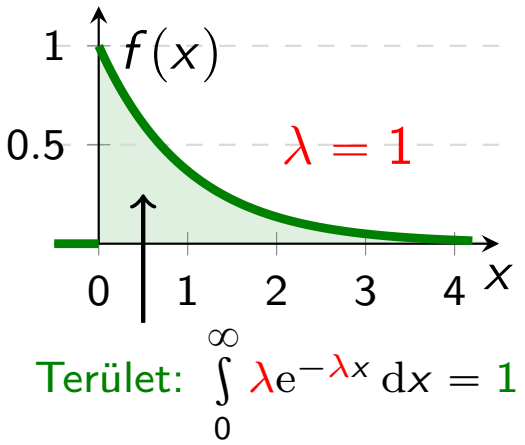
Terület: $\int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1$

Exponenciális eloszlás

Definíció (Exponenciális eloszlás)

Az X valváltozó $\lambda > 0$ paraméterű **exponenciális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



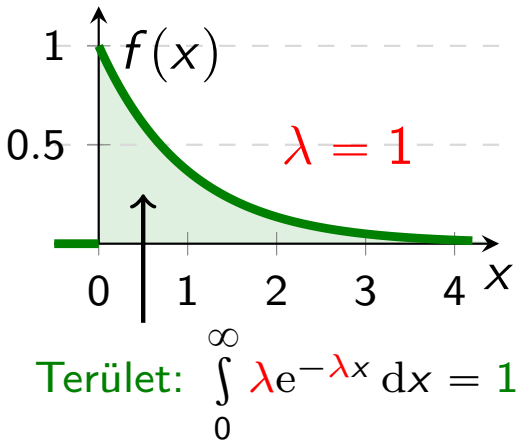
- Jelölés: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

Exponenciális eloszlás

Definíció (Exponenciális eloszlás)

Az X valváltozó $\lambda > 0$ paraméterű **exponenciális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



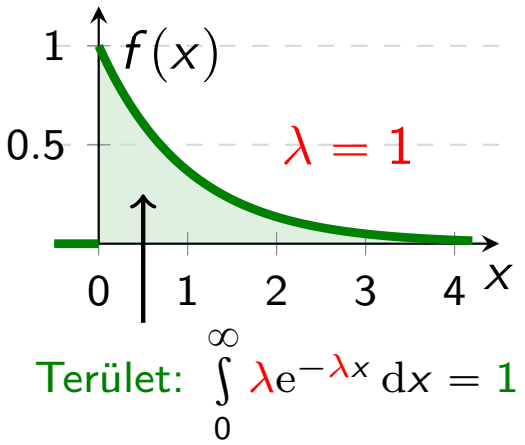
- Jelölés: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$
- $\lambda =$ **intenzitás**

Exponenciális eloszlás

Definíció (Exponenciális eloszlás)

Az X valváltozó $\lambda > 0$ paraméterű **exponenciális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



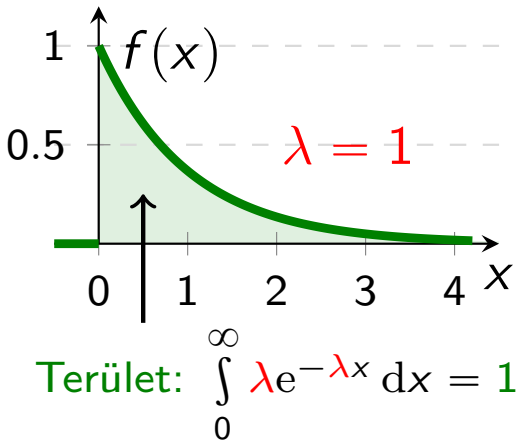
- Jelölés: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$
- $\lambda =$ **intenzitás**: nagyobb λ esetén az eloszlás a kisebb értékek felé tolódik

Exponenciális eloszlás

Definíció (Exponenciális eloszlás)

Az X valváltozó $\lambda > 0$ paraméterű **exponenciális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye

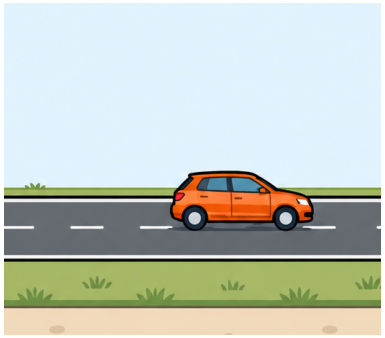
$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



- Jelölés: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$
- $\lambda =$ **intenzitás**: nagyobb λ esetén az eloszlás a kisebb értékek felé tolódik

Példa:

- Kis forgalmú úton a következő járműig eltelő idő

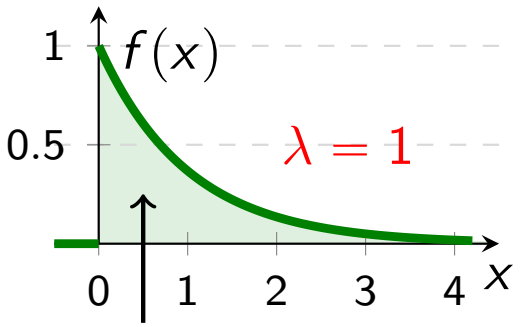


Exponenciális eloszlás

Definíció (Exponenciális eloszlás)

Az X valváltozó $\lambda > 0$ paraméterű **exponenciális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

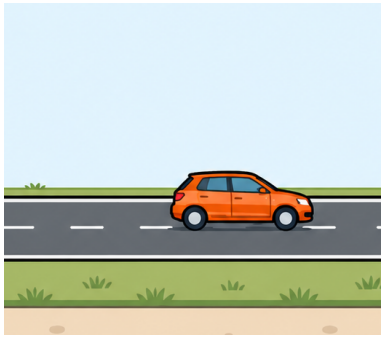


Terület: $\int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1$

- Jelölés: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$
- $\lambda =$ **intenzitás**: nagyobb λ esetén az eloszlás a kisebb értékek felé tolódik

Példa:

- Kis forgalmú úton a következő járműig eltelő idő
- Egy berendezés élettartama hirtelen meghibásodásig



Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény

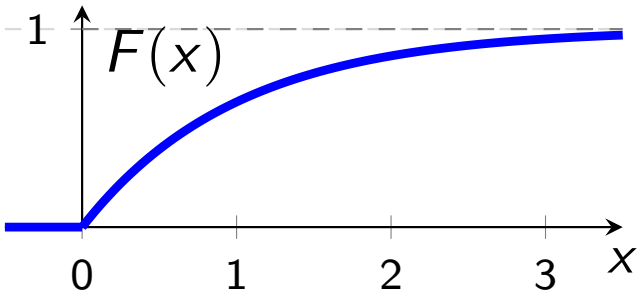
A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

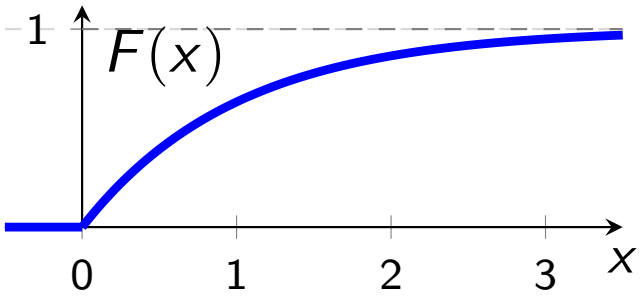
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



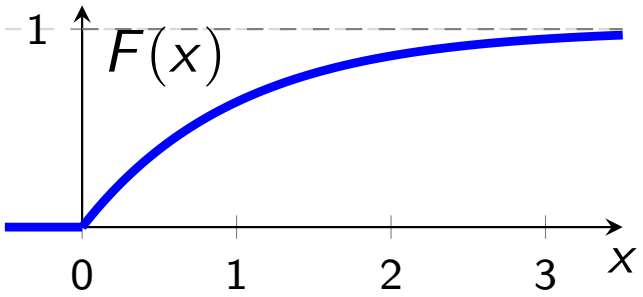
Következmény (Túlélési függvény)

Annak a valószínűsége, hogy még nem történt meg az esemény $t \geqslant 0$ időpontban: $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Következmény (Túlélési függvény)

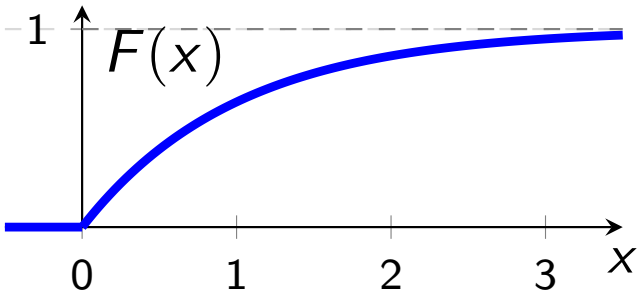
Annak a valószínűsége, hogy még nem történt meg az esemény $t \geqslant 0$ időpontban: $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Ebből levezethető az exponenciális eloszlás egy különleges tulajdonsága

Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Következmény (Túlélési függvény)

Annak a valószínűsége, hogy még nem történt meg az esemény $t \geqslant 0$ időpontban: $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

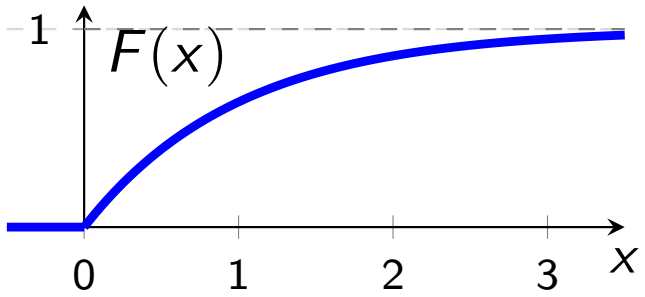
Ebből levezethető az exponenciális eloszlás egy különleges tulajdonsága:

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s)$$

Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Következmény (Túlélési függvény)

Annak a valószínűsége, hogy még nem történt meg az esemény $t \geqslant 0$ időpontban: $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

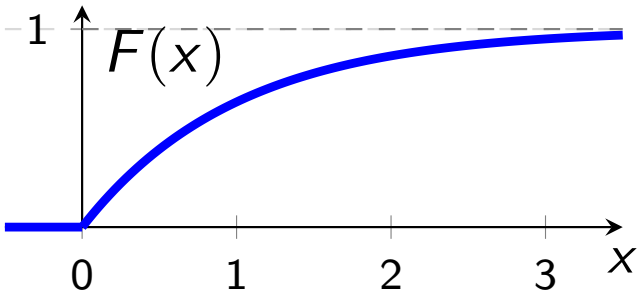
Ebből levezethető az exponenciális eloszlás egy különleges tulajdonsága:

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)}$$

Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Következmény (Túlélési függvény)

Annak a valószínűsége, hogy még nem történt meg az esemény $t \geqslant 0$ időpontban: $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

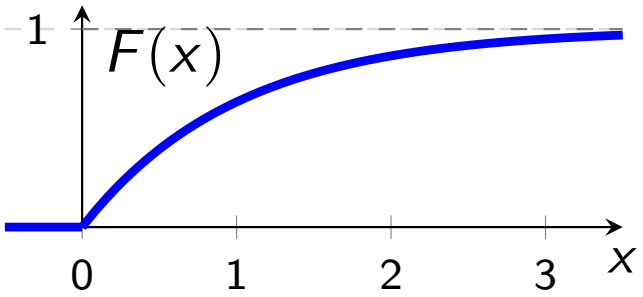
Ebből levezethető az exponenciális eloszlás egy különleges tulajdonsága:

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}}$$

Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Következmény (Túlélési függvény)

Annak a valószínűsége, hogy még nem történt meg az esemény $t \geqslant 0$ időpontban: $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

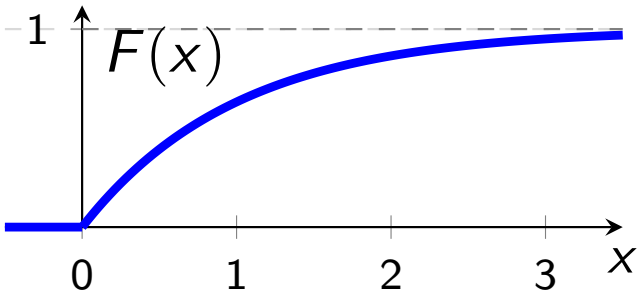
Ebből levezethető az exponenciális eloszlás egy különleges tulajdonsága:

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Következmény (Túlélési függvény)

Annak a valószínűsége, hogy még nem történt meg az esemény $t \geqslant 0$ időpontban: $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

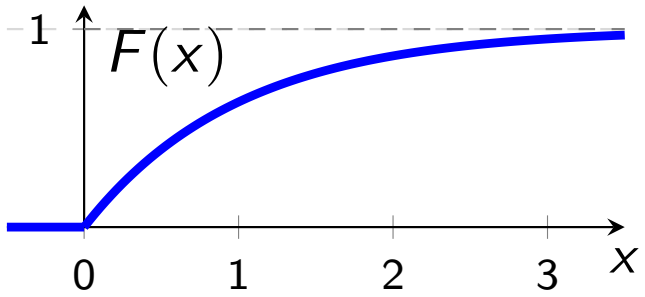
Ebből levezethető az exponenciális eloszlás egy különleges tulajdonsága:

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} = \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t)$$

Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény

A sűrűségfüggvény integrálásával kapjuk, hogy ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Következmény (Túlélési függvény)

Annak a valószínűsége, hogy még nem történt meg az esemény $t \geqslant 0$ időpontban: $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Ebből levezethető az exponenciális eloszlás egy különleges tulajdonsága:

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} = \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t)$$

$\Rightarrow$ **örökifjú** tulajdonság

Exponenciális eloszlás: örökifjúság

Tétel (Örökifjúság)

Ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor minden s, $t \geqslant 0$ esetén



Exponenciális eloszlás: örökifjúság

Tétel (Örökifjúság)

Ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor minden s, $t \geqslant 0$ esetén

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t). \tag{2}$$



Exponenciális eloszlás: örökifjúság

Tétel (Örökifjúság)

Ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor minden s, $t \geqslant 0$ esetén

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t). \tag{2}$$



Megjegyzés:

- Örökifjú = memória nélküli

Exponenciális eloszlás: örökifjúság

Tétel (Örökifjúság)

Ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor minden s, $t \geqslant 0$ esetén

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t). \tag{2}$$



Megjegyzés:

- Örökifjú = memória nélküli:
  A hátralévő idő eloszlása nem függ a már eltelt időtől

Exponenciális eloszlás: örökifjúság

Tétel (Örökifjúság)

Ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor minden s, $t \geqslant 0$ esetén

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t). \tag{2}$$



Megjegyzés:

- Örökifjú = memória nélküli:
  A hátralévő idő eloszlása nem függ a már eltelt időtől
- A (2) egyenlet ekvivalens azzal, hogy

$$\mathbb{P}(X < s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X < t)$$

Exponenciális eloszlás: örökifjúság

Tétel (Örökifjúság)

Ha $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor minden s, $t \geqslant 0$ esetén

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t). \tag{2}$$



Megjegyzés:

- Örökifjú = memória nélküli:
  A hátralévő idő eloszlása nem függ a már eltelt időtől
- A (2) egyenlet ekvivalens azzal, hogy

$$\mathbb{P}(X < s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X < t)$$

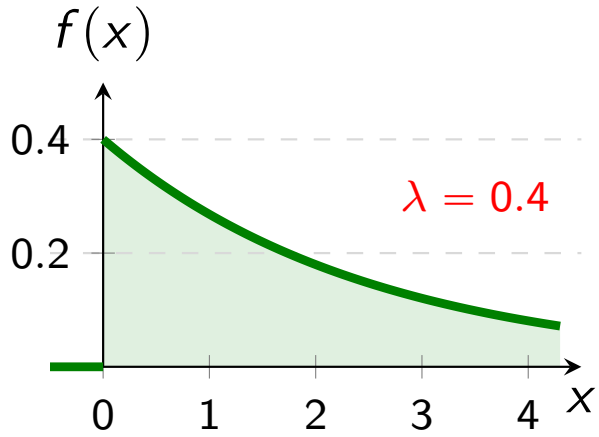
- Az exponenciális az egyetlen örökifjú folytonos eloszlás

Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

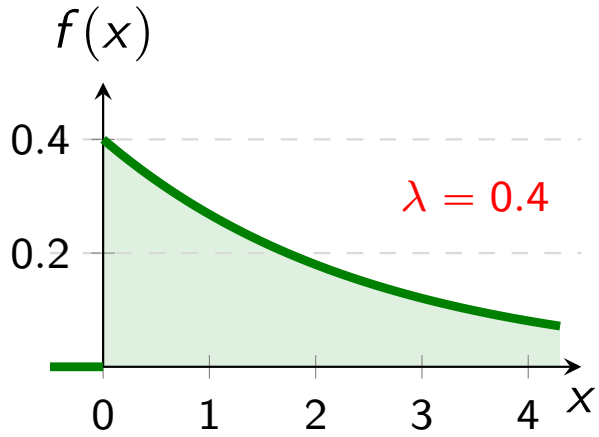
Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$



Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

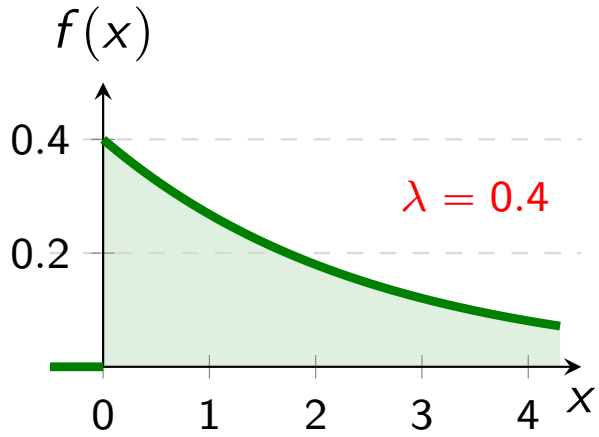
Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

A definíciókból parciális integrálással számolhatunk:



Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

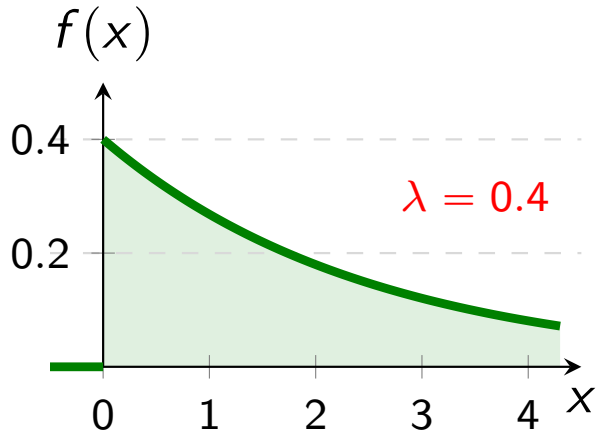


A definíciókból parciális integrálással számolhatunk:

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$

Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

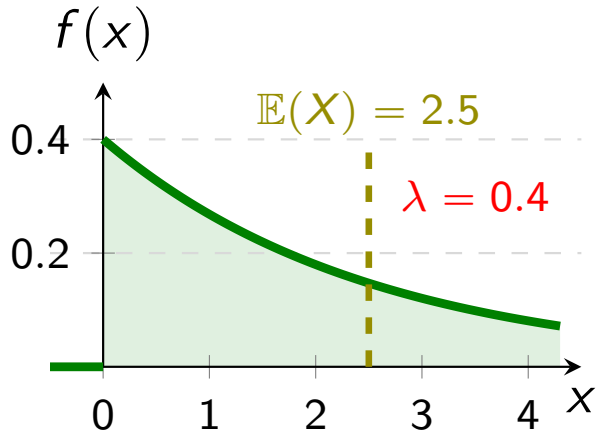


A definíciókból parciális integrálással számolhatunk:

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$

Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

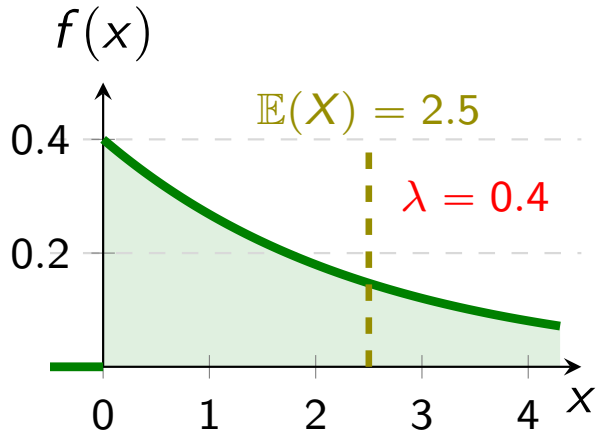


A definíciókból parciális integrálással számolhatunk:

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$

Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

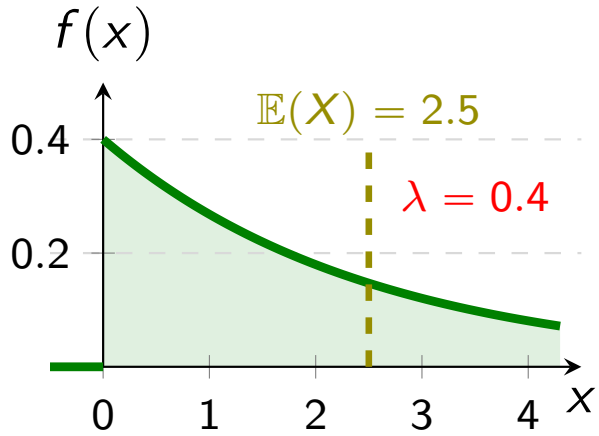


A definíciókból parciális integrálással számolhatunk:

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$

Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

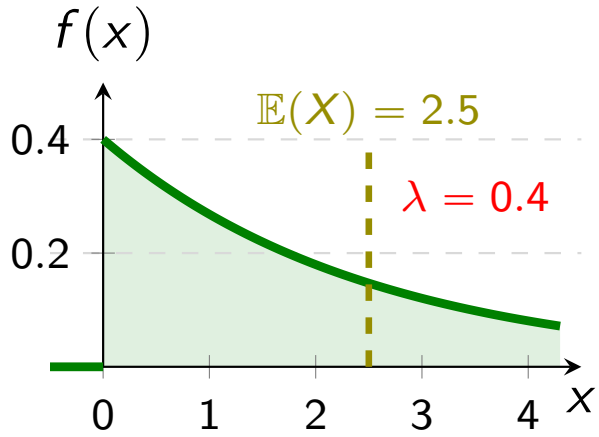


A definíciókból parciális integrálással számolhatunk:

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$

Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

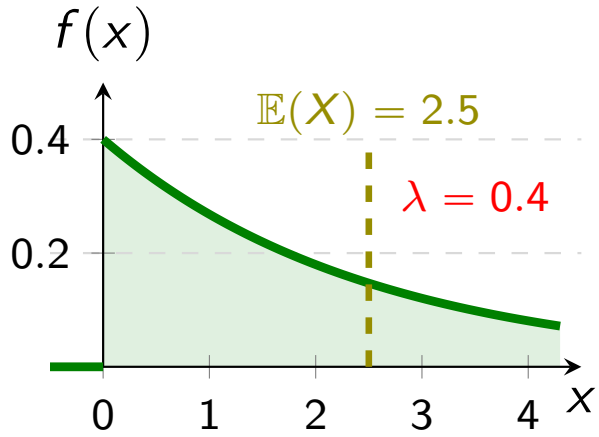


A definíciókból parciális integrálással számolhatunk:

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}$

Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

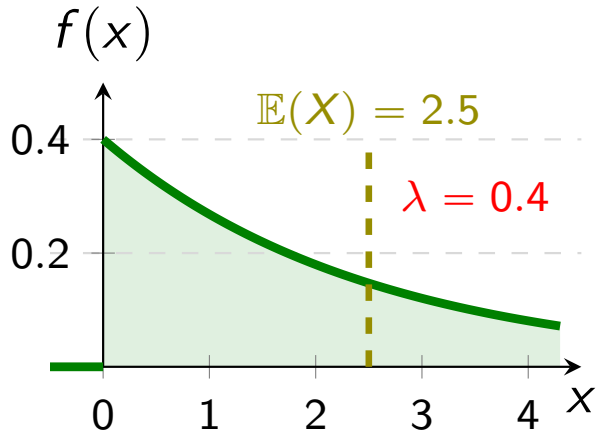


A definíciókból parciális integrálással számolhatunk:

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}$
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$

Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

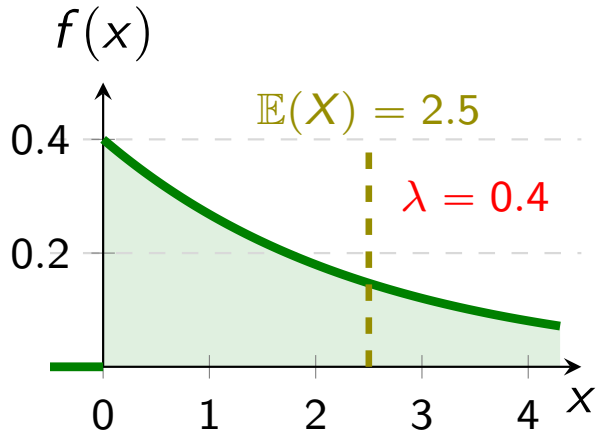


A definíciókból parciális integrálással számolhatunk:

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}$
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Exponenciális eloszlás: várható érték, szórás

Legyen $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$



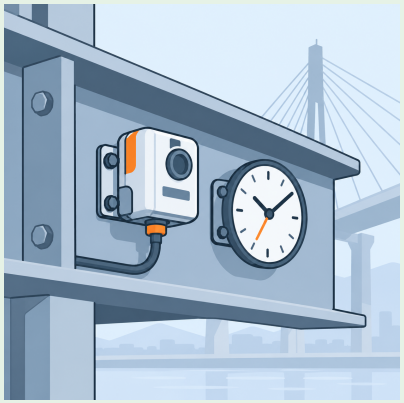
A definíciókból parciális integrálással számolhatunk:

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}$
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda}$

Exponenciális eloszlás: példa

Feladat (Szenzor élettartama)

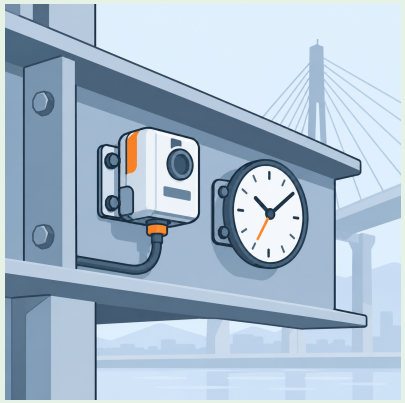
Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük.



Exponenciális eloszlás: példa

Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

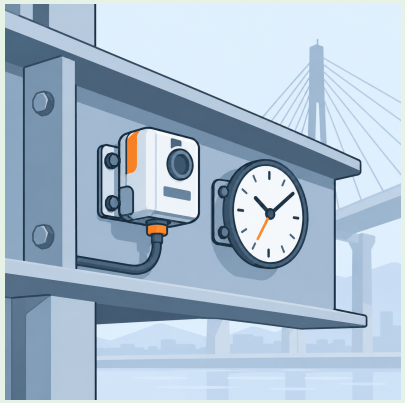


Exponenciális eloszlás: példa

Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a. Mennyi X szórása?



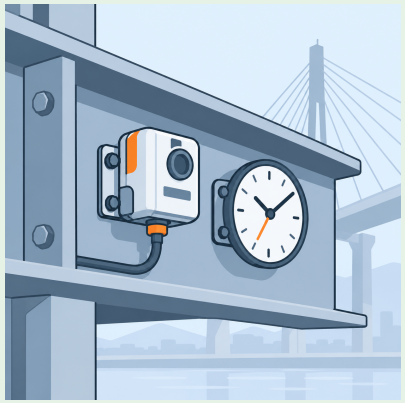
Exponenciális eloszlás: példa

Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a. Mennyi X szórása?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?



Exponenciális eloszlás: példa

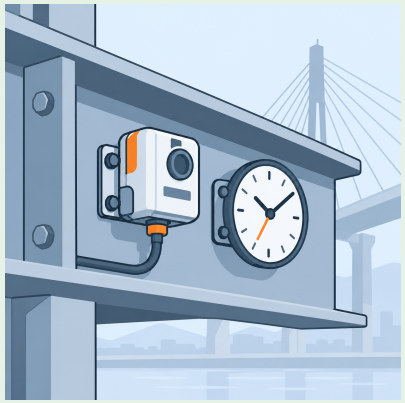
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a. Mennyi X szórása?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c. A szenzor már 600 órája működik.



Exponenciális eloszlás: példa

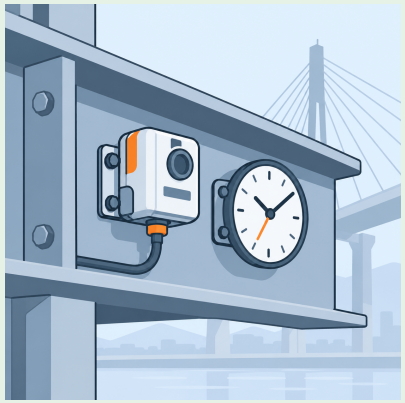
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a. Mennyi X szórása?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c. A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Exponenciális eloszlás: példa

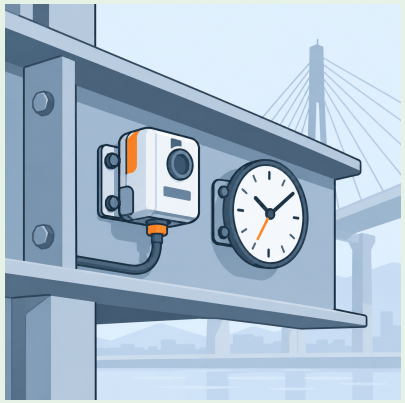
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a. Mennyi X szórása?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c. A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás:

Exponenciális eloszlás: példa

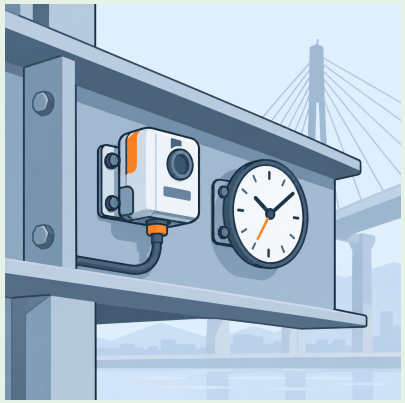
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a. Mennyi X szórása?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c. A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

Exponenciális eloszlás: példa

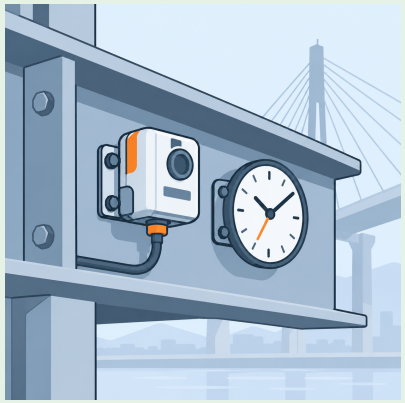
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a) Mennyi X szórása?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c) A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000$

Exponenciális eloszlás: példa

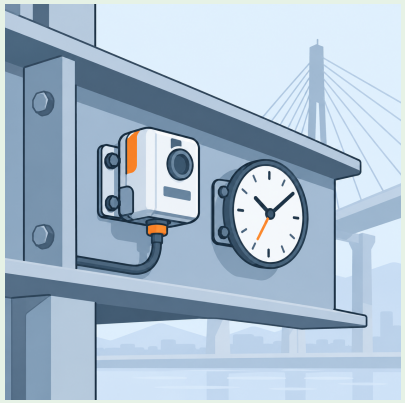
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a) Mennyi X szórása?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c) A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda}$

Exponenciális eloszlás: példa

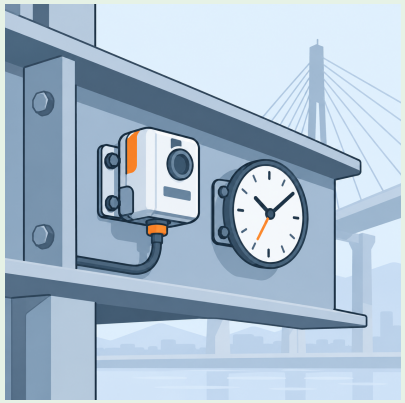
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a. Mennyi X szórása?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c. A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.001$

Exponenciális eloszlás: példa

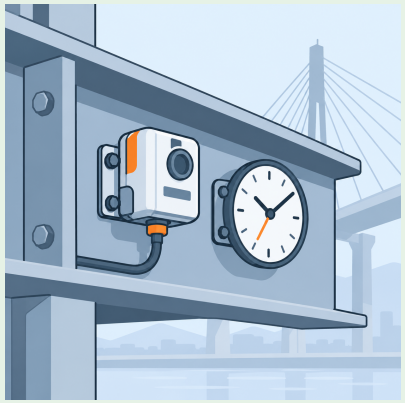
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a. Mennyi X szórása?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c. A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.001$, így

a. $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda}$

Exponenciális eloszlás: példa

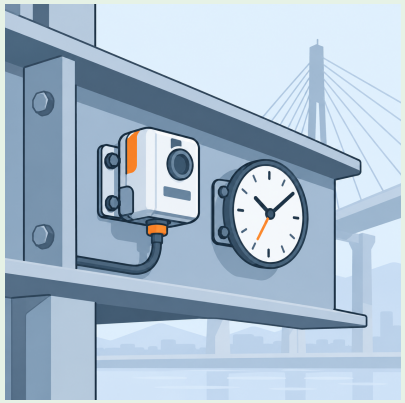
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a) Mennyi X szórása?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c) A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.001$, így

a) $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$

Exponenciális eloszlás: példa

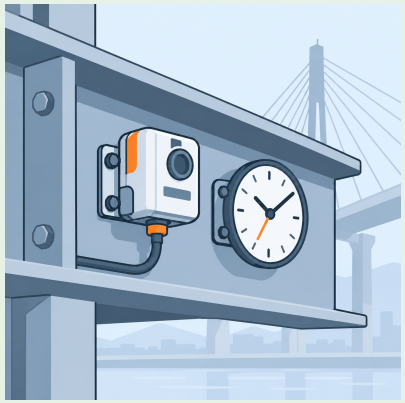
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a) Mennyi X szórása?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c) A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.001$, így

a) $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$

b) $\mathbb{P}(X \leqslant 1500)$

Exponenciális eloszlás: példa

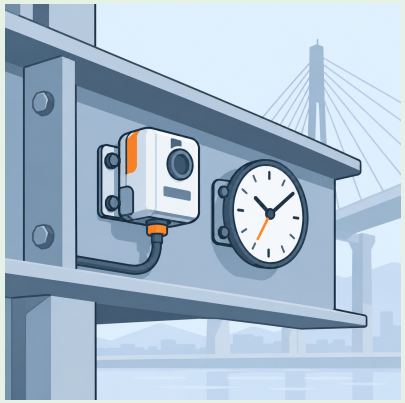
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a) Mennyi X szórása?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c) A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.001$, így

a) $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$

b) $\mathbb{P}(X \leqslant 1500) = 1 - \mathrm{e}^{-0.001 \cdot 1500}$

Exponenciális eloszlás: példa

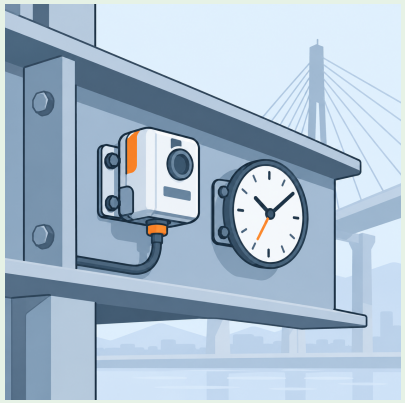
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a. Mennyi X szórása?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c. A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.001$, így

a. $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$

b. $\mathbb{P}(X \leqslant 1500) = 1 - \mathrm{e}^{-0.001 \cdot 1500} = 1 - \mathrm{e}^{-1.5}$

Exponenciális eloszlás: példa

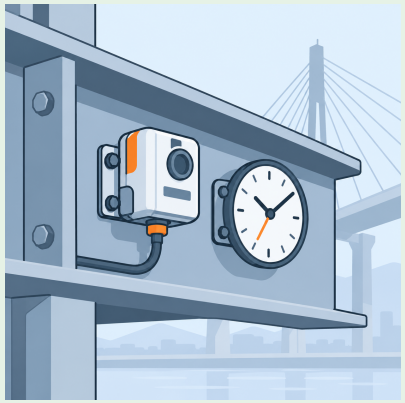
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a) Mennyi X szórása?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c) A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.001$, így

a) $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$

b) $\mathbb{P}(X \leqslant 1500) = 1 - \mathrm{e}^{-0.001 \cdot 1500} = 1 - \mathrm{e}^{-1.5} \approx 0.7769$

Exponenciális eloszlás: példa

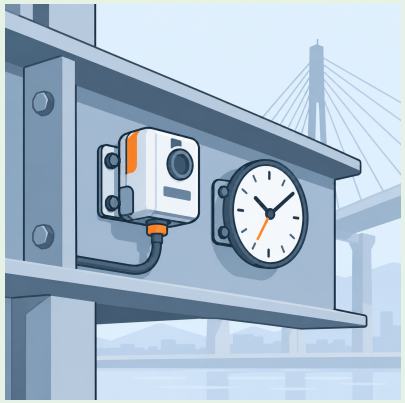
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a. Mennyi X szórása?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c. A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.001$, így

a. $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$

b. $\mathbb{P}(X \leqslant 1500) = 1 - \mathrm{e}^{-0.001 \cdot 1500} = 1 - \mathrm{e}^{-1.5} \approx 0.7769$

c. $\mathbb{P}(X > 600 + 500 \mid X > 600)$

Exponenciális eloszlás: példa

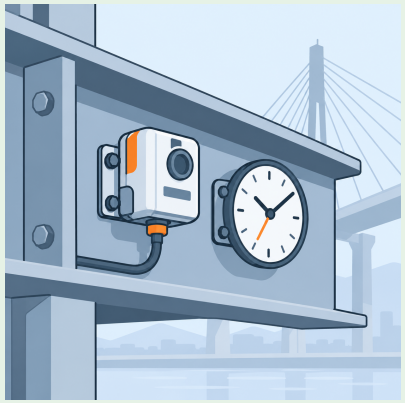
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a) Mennyi X szórása?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c) A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.001$, így

a) $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$

b) $\mathbb{P}(X \leqslant 1500) = 1 - \mathrm{e}^{-0.001 \cdot 1500} = 1 - \mathrm{e}^{-1.5} \approx 0.7769$

c) $\mathbb{P}(X > 600 + 500 \mid X > 600) = \mathbb{P}(X > 500)$

Exponenciális eloszlás: példa

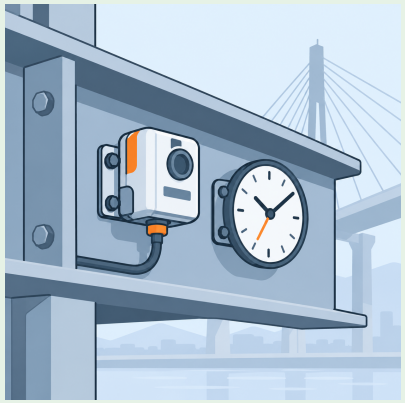
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a) Mennyi X szórása?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c) A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.001$, így

a) $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$

b) $\mathbb{P}(X \leqslant 1500) = 1 - \mathrm{e}^{-0.001 \cdot 1500} = 1 - \mathrm{e}^{-1.5} \approx 0.7769$

c) $\mathbb{P}(X > 600 + 500 \mid X > 600) = \mathbb{P}(X > 500) = \mathrm{e}^{-0.001 \cdot 500}$

Exponenciális eloszlás: példa

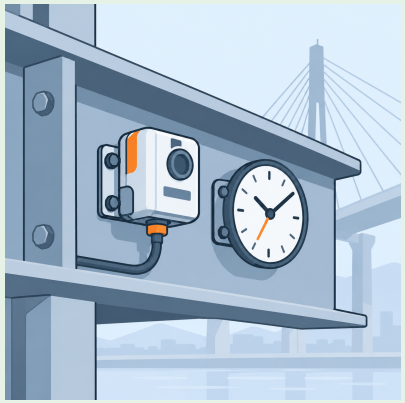
Feladat (Szenzor élettartama)

Egy híd megfigyelőrendszerében működő szenzor X élettartamát exponenciális eloszlással modellezzük. A szenzor átlagos élettartama 1000 óra.

a) Mennyi X szórása?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az új szenzor élettartama nem haladja meg az 1500 órát?

c) A szenzor már 600 órája működik. Mekkora eséllyel működik még legalább 500 óráig?



Megoldás: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = 1000 = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.001$, így

a) $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$

b) $\mathbb{P}(X \leqslant 1500) = 1 - \mathrm{e}^{-0.001 \cdot 1500} = 1 - \mathrm{e}^{-1.5} \approx 0.7769$

c) $\mathbb{P}(X > 600 + 500 \mid X > 600) = \mathbb{P}(X > 500) = \mathrm{e}^{-0.001 \cdot 500} \approx 0.6065$

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Az X valváltozó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha

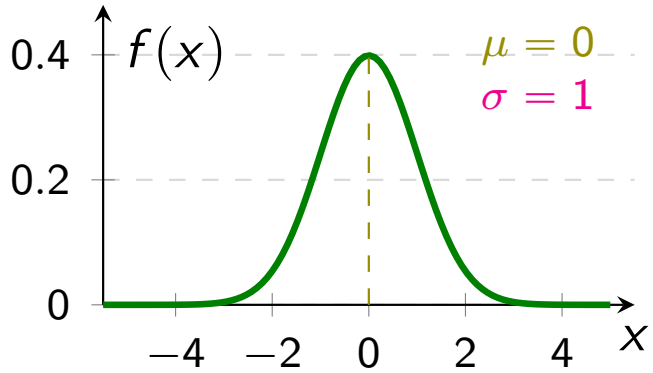
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Az X valváltozó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

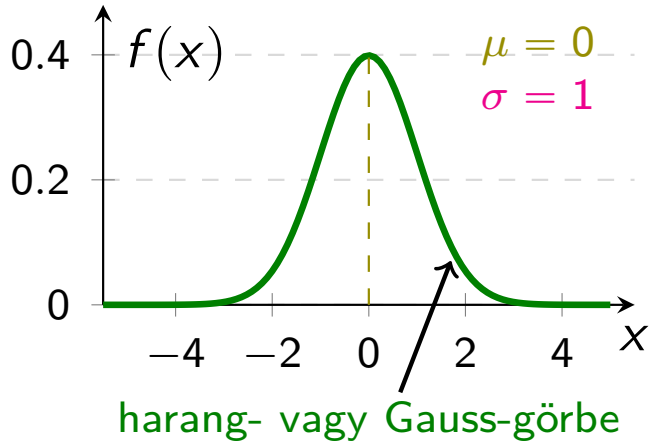


Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Az X valváltozó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

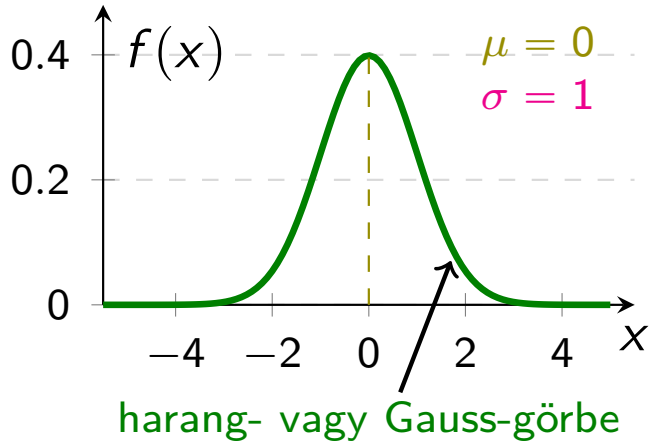


Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Az X valváltozó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$



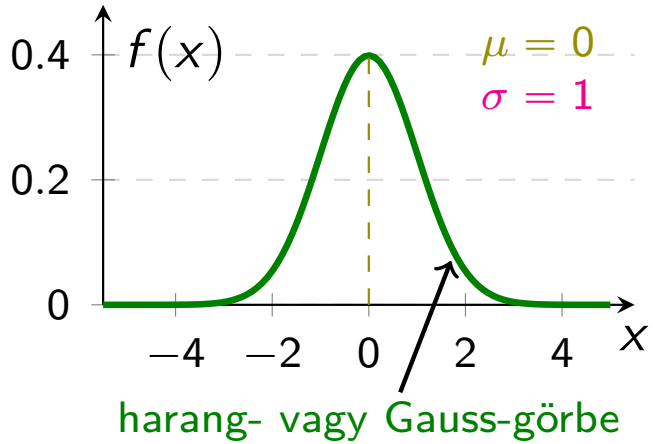
- Jelölés: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Az X valváltozó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$



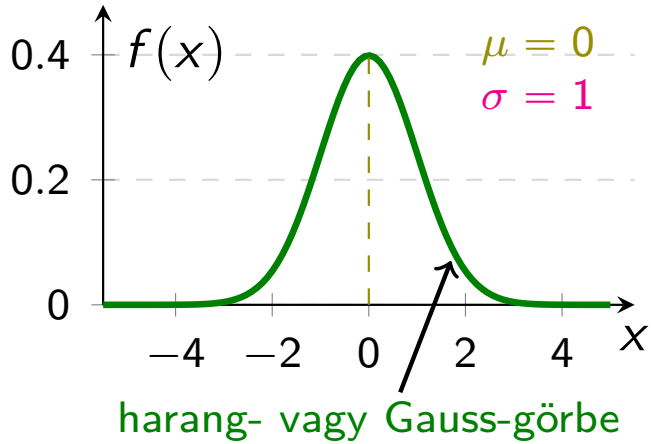
- Jelölés: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Gauss-eloszlásnak is nevezik

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Az X valváltozó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$



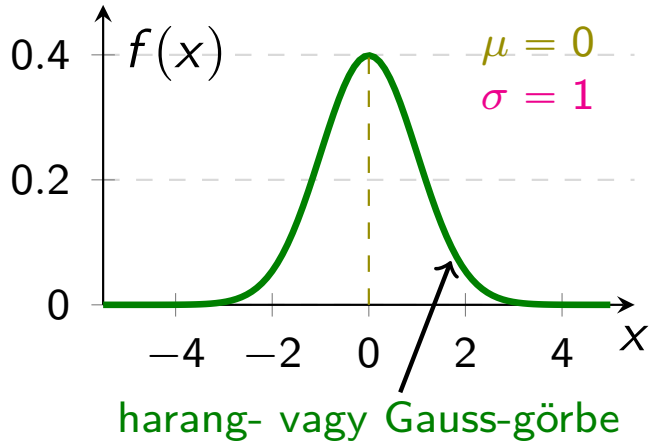
- Jelölés: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Gauss-eloszlásnak is nevezik
- μ a **várható érték**: $\mathbb{E}(X) = \mu$

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Az X valváltozó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$



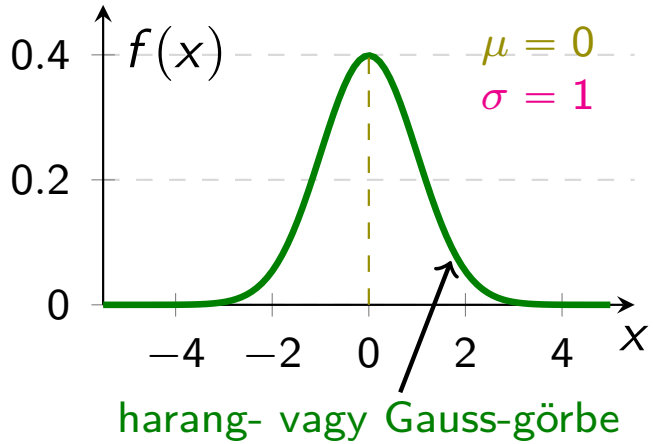
- Jelölés: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Gauss-eloszlásnak is nevezik
- μ a **várható érték**: $\mathbb{E}(X) = \mu$; σ a **szórás**: $\mathbb{D}(X) = \sigma$,

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Az X valváltozó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$



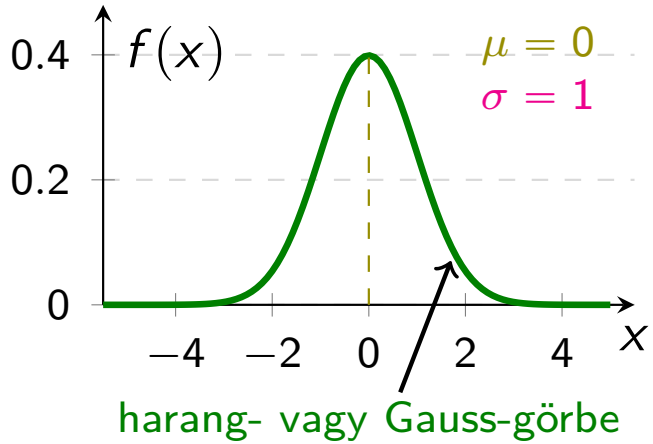
- Jelölés: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Gauss-eloszlásnak is nevezik
- μ a **várható érték**: $\mathbb{E}(X) = \mu$; σ a **szórás**: $\mathbb{D}(X) = \sigma, \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Az X valváltozó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$



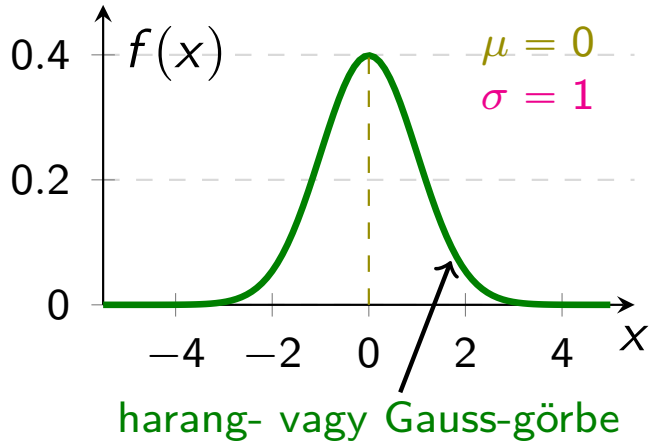
- Jelölés: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Gauss-eloszlásnak is nevezik
- μ a **várható érték**: $\mathbb{E}(X) = \mu$; σ a **szórás**: $\mathbb{D}(X) = \sigma, \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ eloszlásfüggvény nem fejezhető ki elemi képlettel

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Az X valváltozó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$



- Jelölés: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Gauss-eloszlásnak is nevezik
- μ a **várható érték**: $\mathbb{E}(X) = \mu$; σ a **szórás**: $\mathbb{D}(X) = \sigma, \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ eloszlásfüggvény nem fejezhető ki elemi képlettel

Példa:

- Emberek magassága közelítőleg normális eloszlású

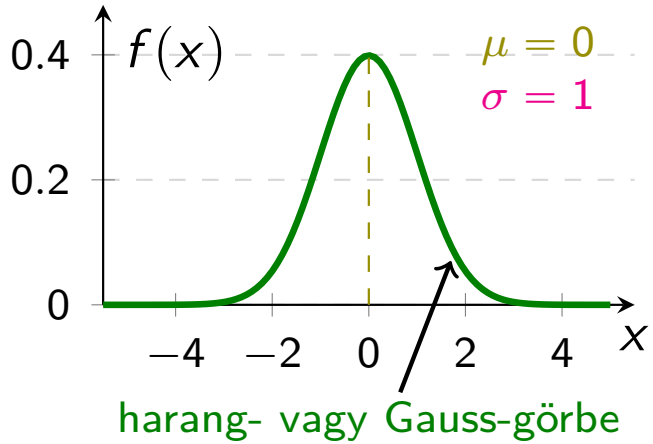


Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Az X valváltozó **normális eloszlású** $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$



- Jelölés: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Gauss-eloszlásnak is nevezik
- μ a **várható érték**: $\mathbb{E}(X) = \mu$; σ a **szórás**: $\mathbb{D}(X) = \sigma, \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ eloszlásfüggvény nem fejezhető ki elemi képlettel

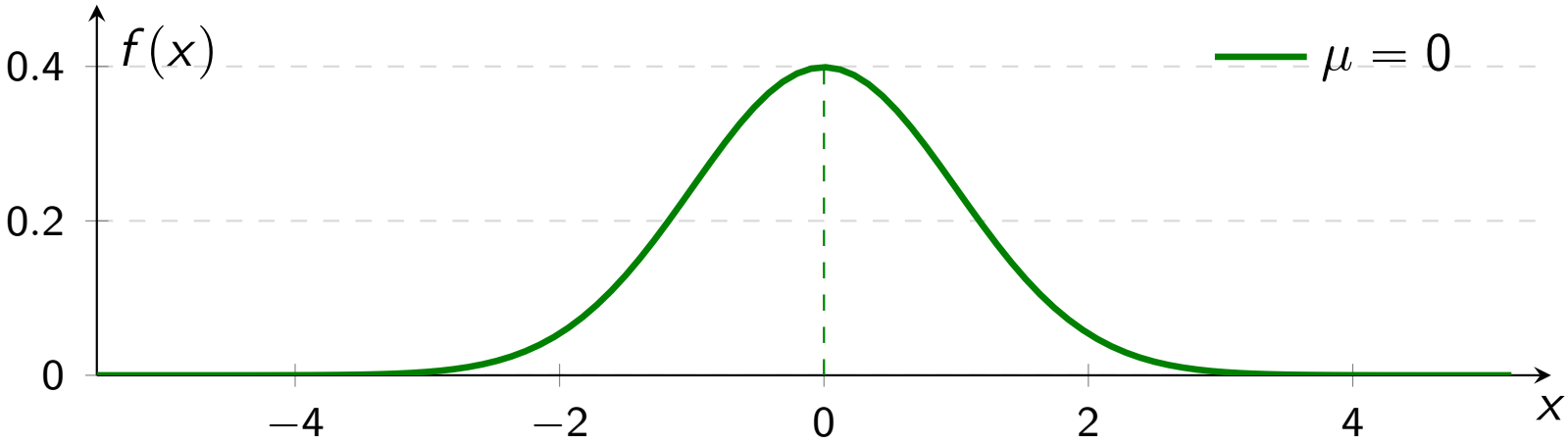
Példa:

- Emberek magassága közelítőleg normális eloszlású
- Folytonos értékű mérés (előjeles) hibája



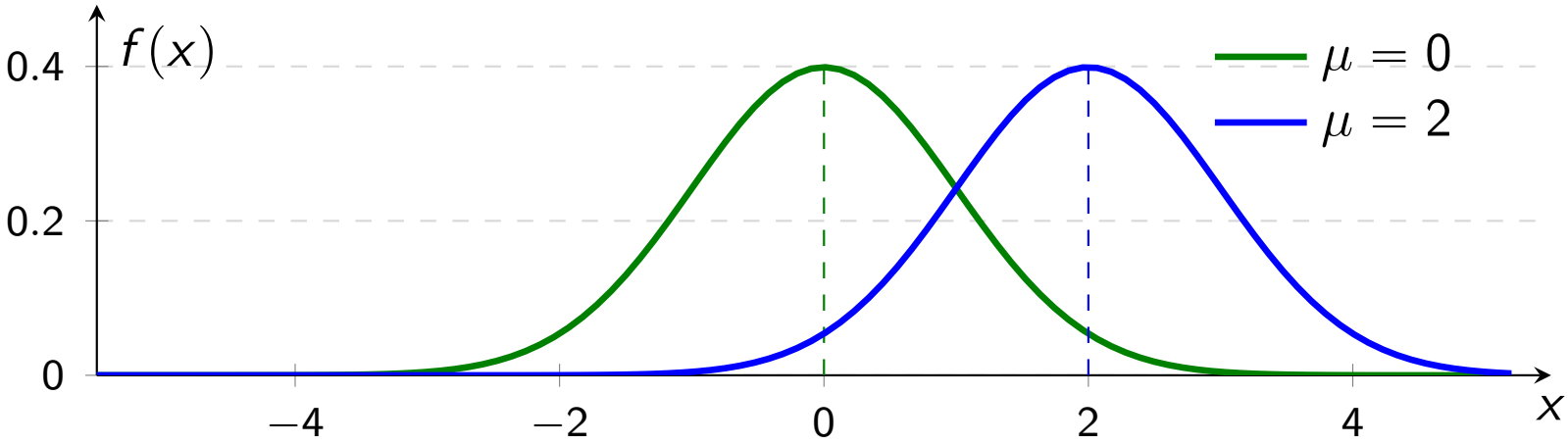
Normális eloszlás: paraméterek szerepe

Nagyobb μ (σ rögzített): a görbe **vízszintesen eltolódik** jobbra



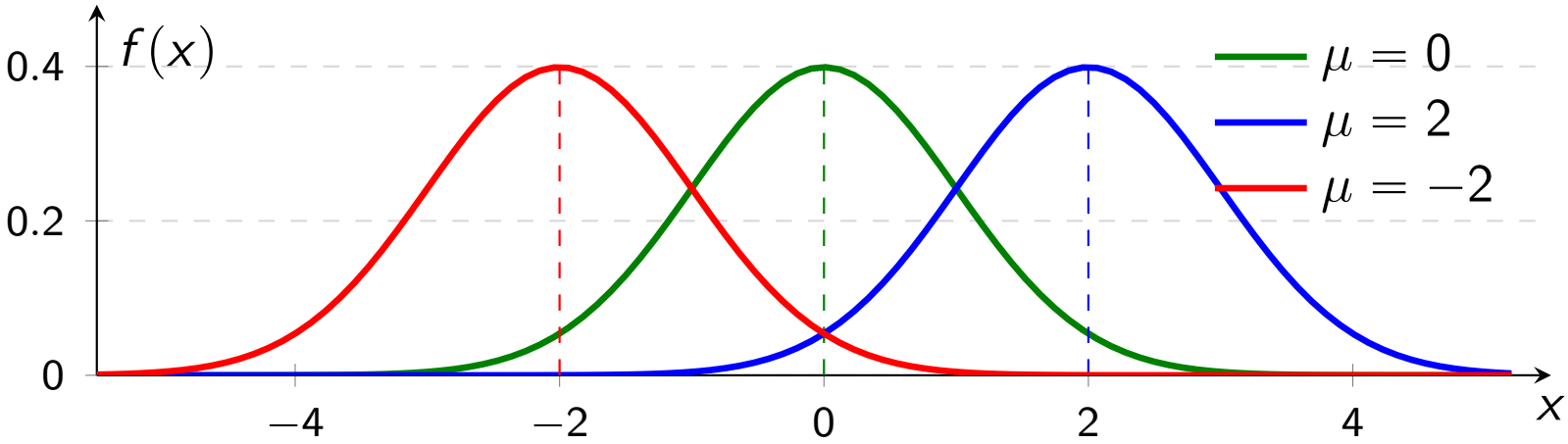
Normális eloszlás: paraméterek szerepe

Nagyobb μ (σ rögzített): a görbe **vízszintesen eltolódik** jobbra



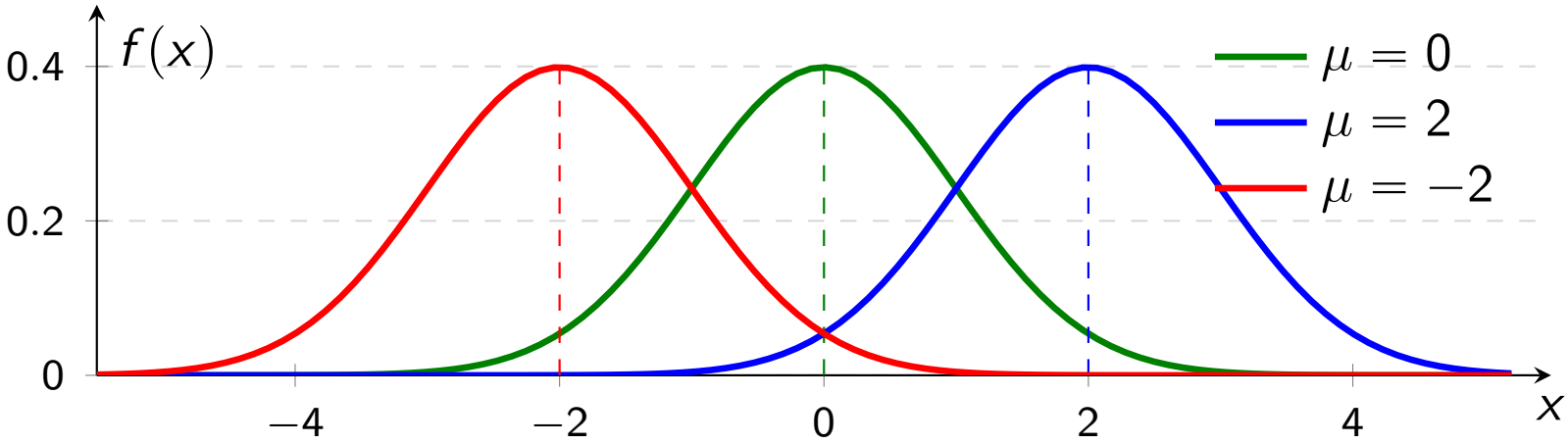
Normális eloszlás: paraméterek szerepe

Nagyobb μ (σ rögzített): a görbe **vízszintesen eltolódik** jobbra

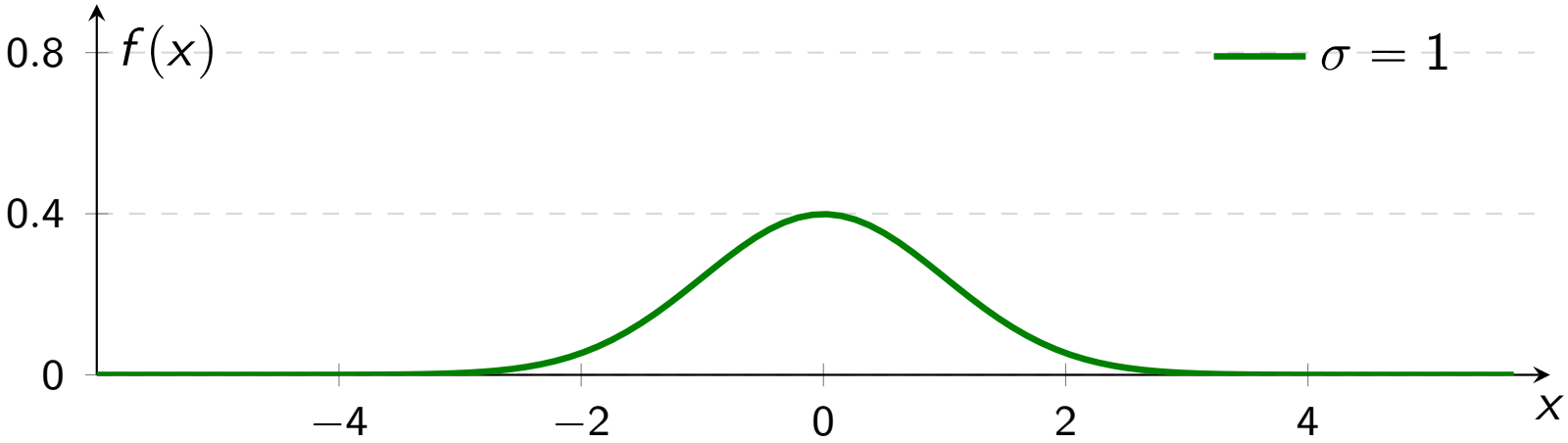


Normális eloszlás: paraméterek szerepe

Nagyobb μ (σ rögzített): a görbe **vízszintesen eltolódik** jobbra

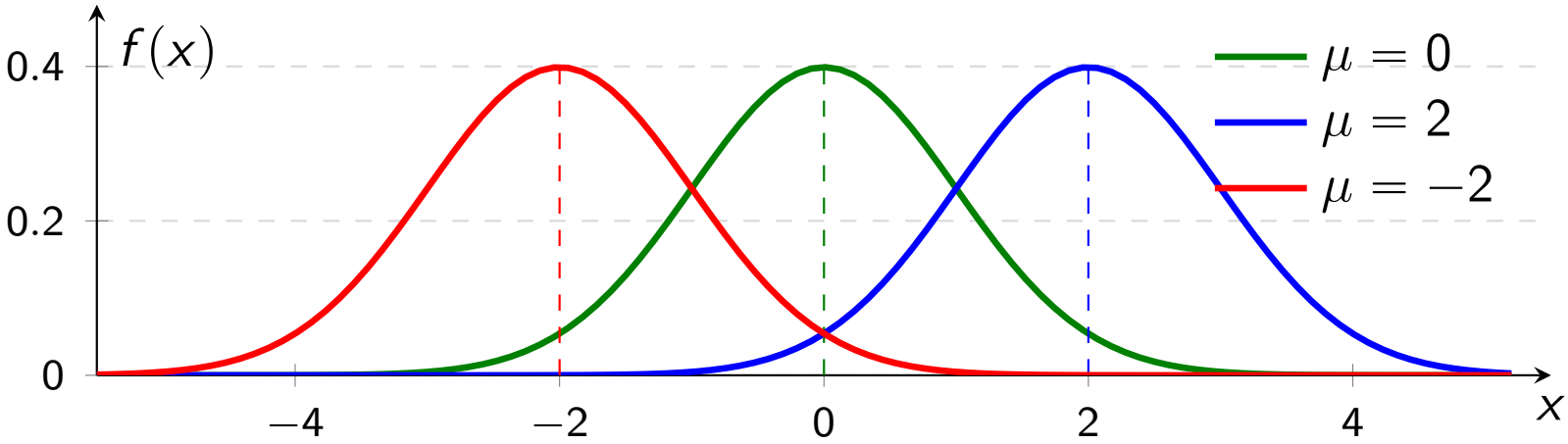


Nagyobb σ (μ rögzített): **szélesebb és laposabb** görbe

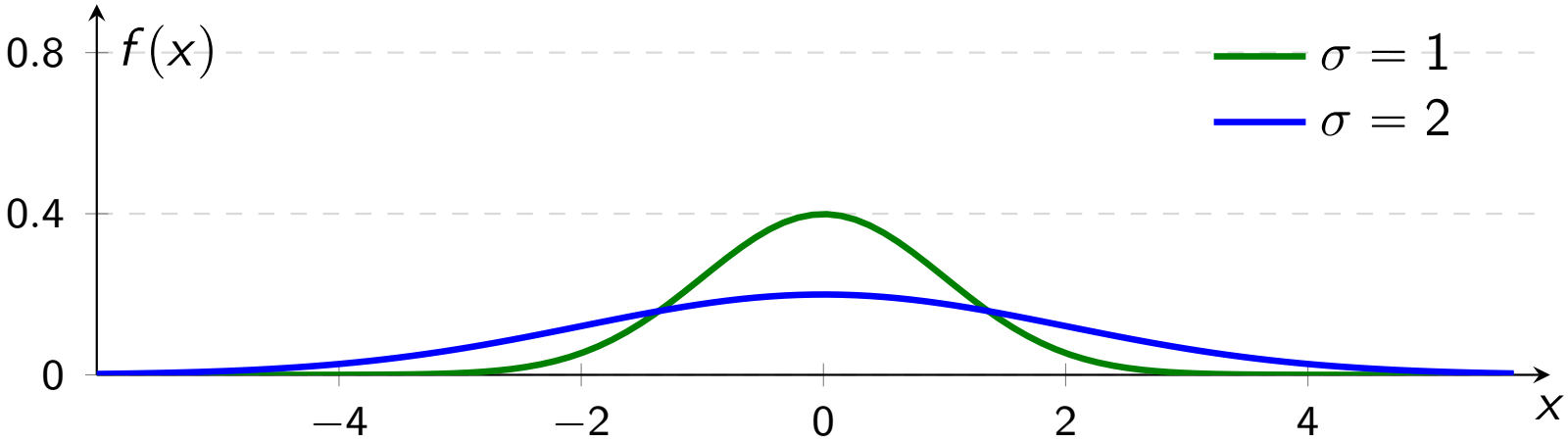


Normális eloszlás: paraméterek szerepe

Nagyobb μ (σ rögzített): a görbe **vízszintesen eltolódik** jobbra

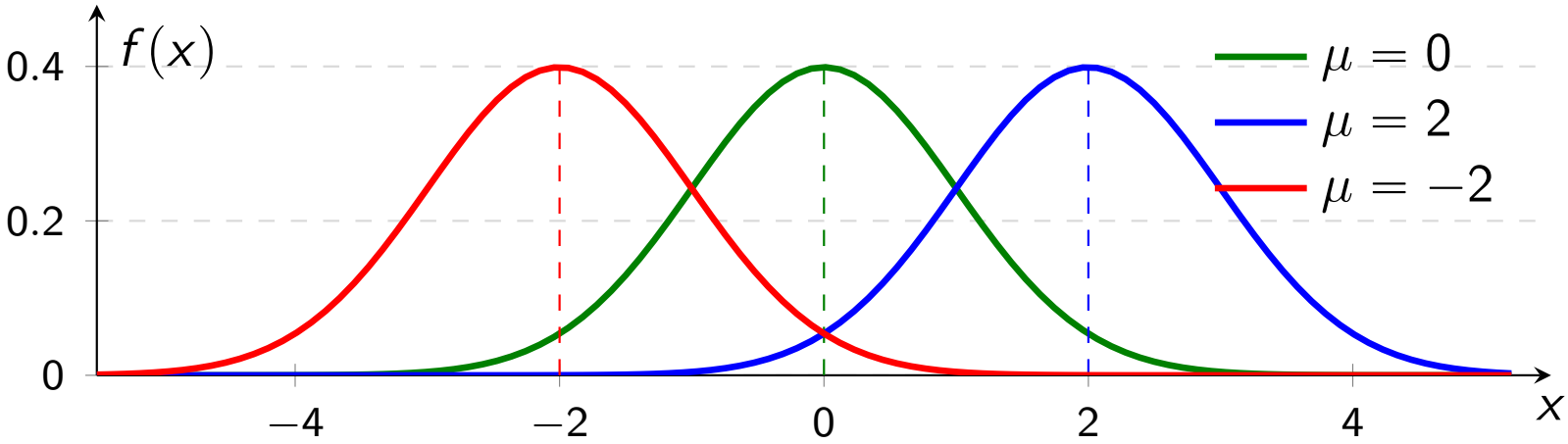


Nagyobb σ (μ rögzített): **szélesebb és laposabb** görbe

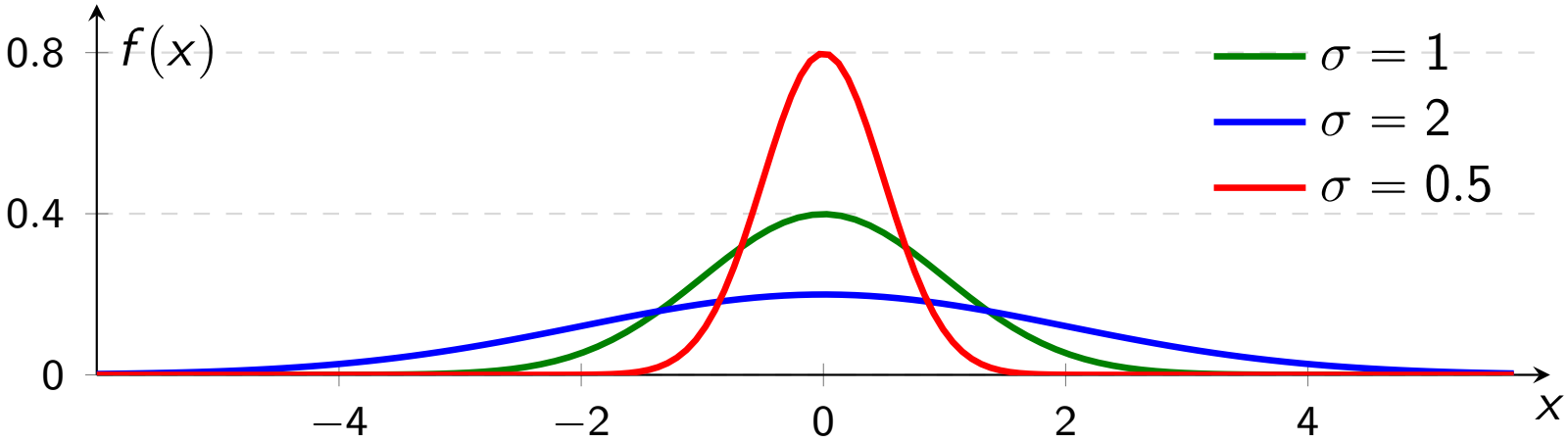


Normális eloszlás: paraméterek szerepe

Nagyobb μ (σ rögzített): a görbe **vízszintesen eltolódik** jobbra



Nagyobb σ (μ rögzített): **szélesebb és laposabb** görbe



Standard normális eloszlás

Definíció (Standard normális eloszlás)

A $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eloszlást **standard normálisnak** nevezzük.

Standard normális eloszlás

Definíció (Standard normális eloszlás)

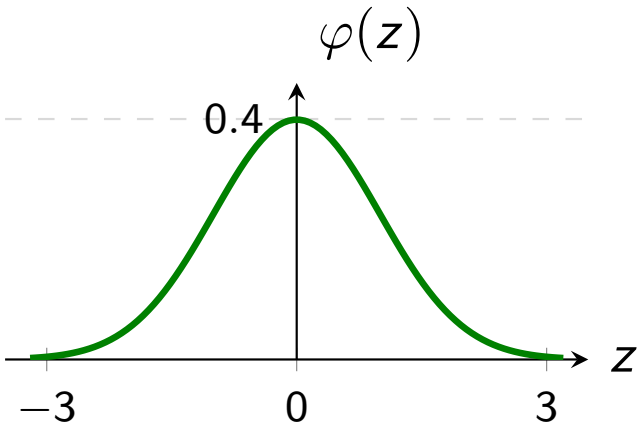
A $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eloszlást **standard normálisnak** nevezzük. Ennek sűrűség- és eloszlásfüggvényére a φ és Φ jelöléseket használjuk:

Standard normális eloszlás

Definíció (Standard normális eloszlás)

A $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eloszlást **standard normálisnak** nevezzük. Ennek sűrűség- és eloszlásfüggvényére a φ és Φ jelöléseket használjuk:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}},$$

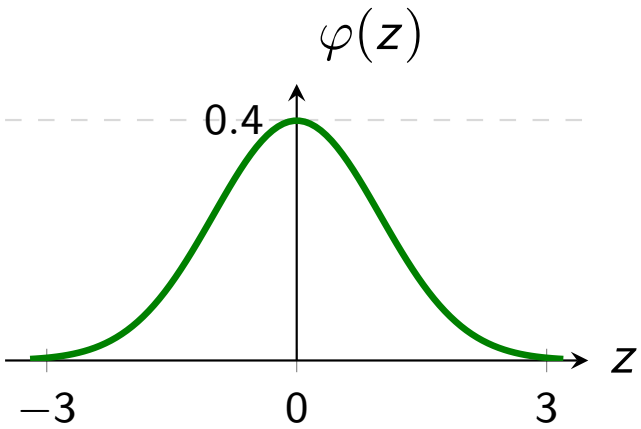


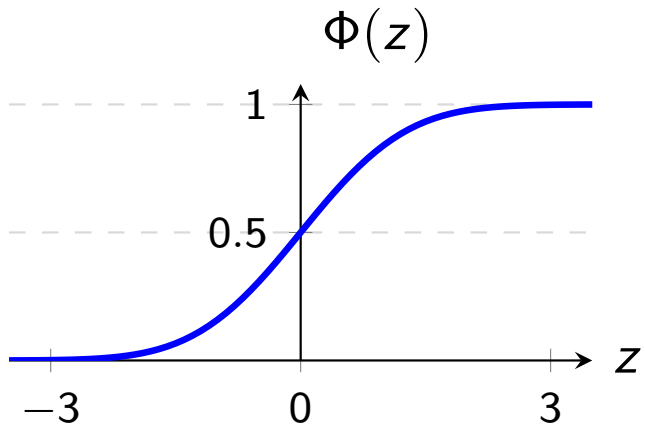
Standard normális eloszlás

Definíció (Standard normális eloszlás)

A $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eloszlást **standard normálisnak** nevezzük. Ennek sűrűség- és eloszlásfüggvényére a φ és Φ jelöléseket használjuk:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$



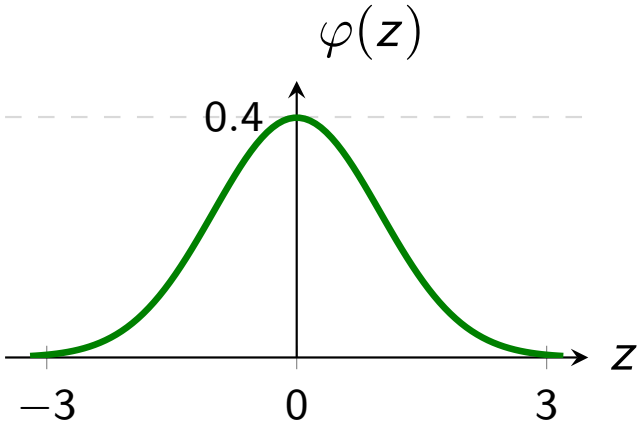


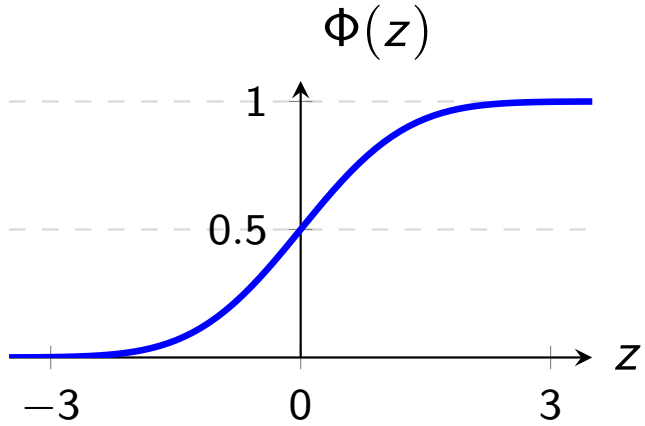
Standard normális eloszlás

Definíció (Standard normális eloszlás)

A $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eloszlást **standard normálisnak** nevezzük. Ennek sűrűség- és eloszlásfüggvényére a φ és Φ jelöléseket használjuk:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$





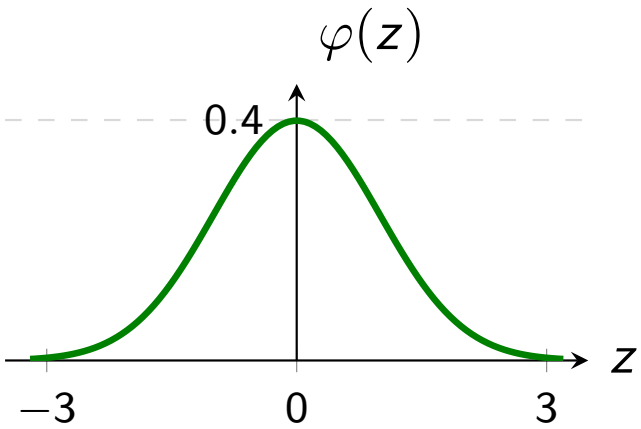
- $\Phi(z)$-re sincs elemi képlet

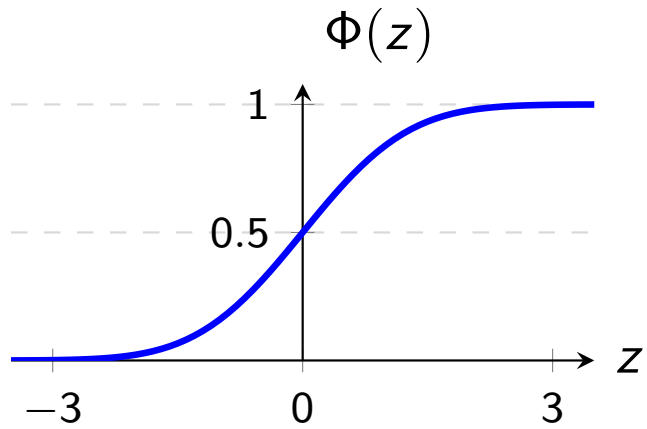
Standard normális eloszlás

Definíció (Standard normális eloszlás)

A $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eloszlást **standard normálisnak** nevezzük. Ennek sűrűség- és eloszlásfüggvényére a φ és Φ jelöléseket használjuk:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

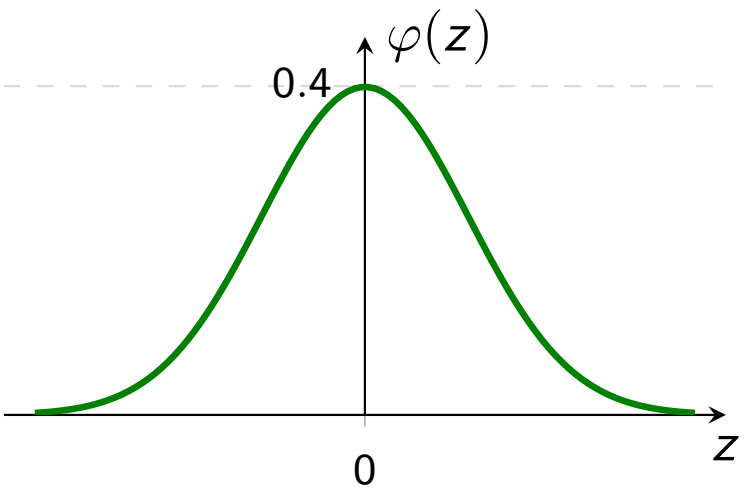


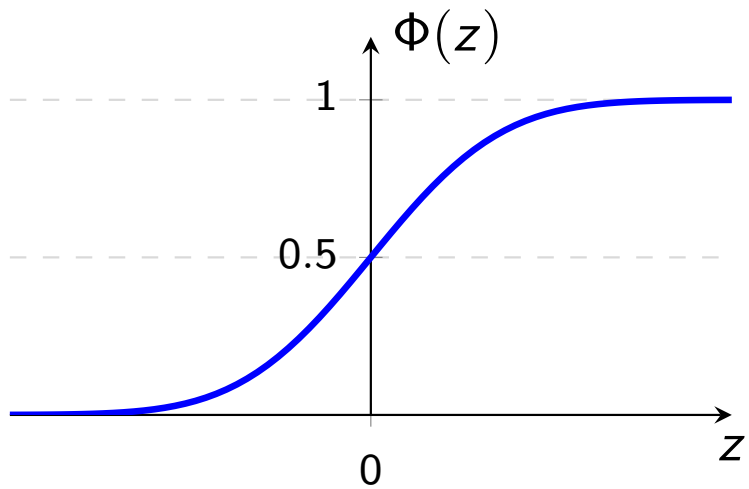


- $\Phi(z)$-re sincs elemi képlet, de értékeit **táblázatból** vagy szoftverrel meg tudjuk határozni

Standard normális eloszlás: eloszlásfüggvény

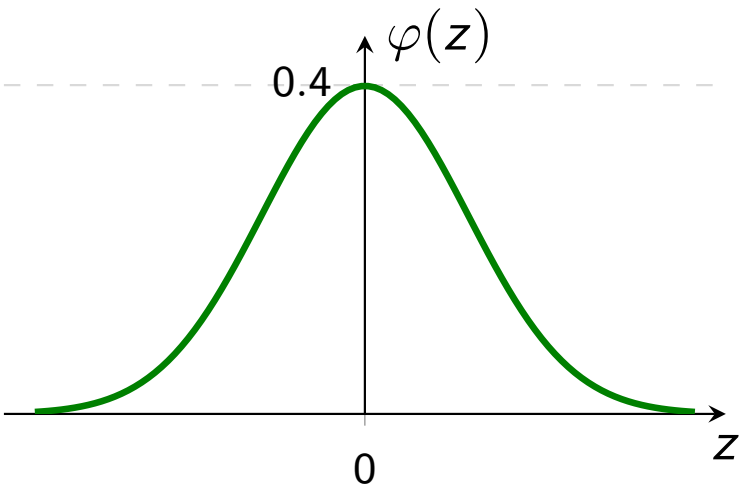
- A táblázatokban Φ értékei csak nemnegatív számokra adottak

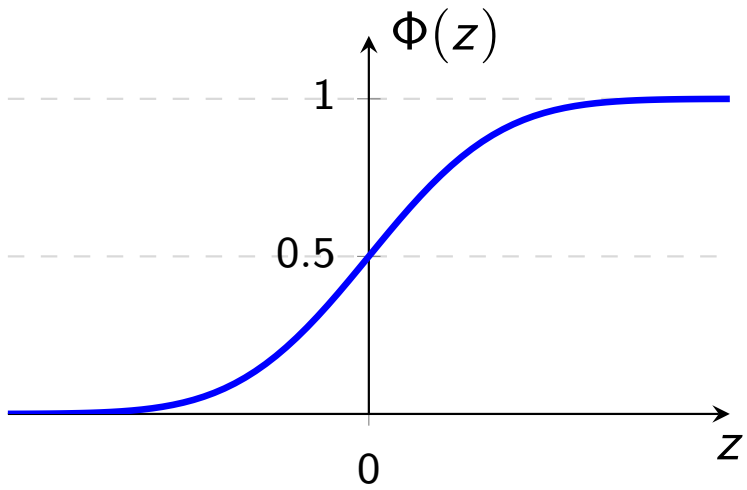




Standard normális eloszlás: eloszlásfüggvény

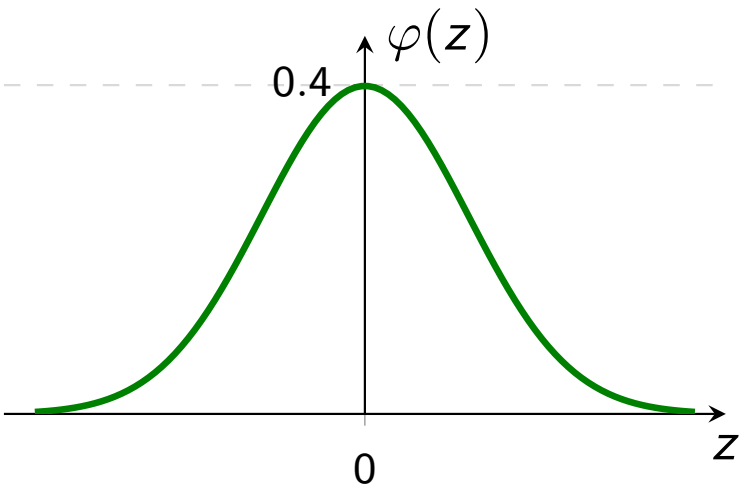
- A táblázatokban Φ értékei csak nemnegatív számokra adottak
- Negatív számokra az eloszlás szimmetriáját használhatjuk:

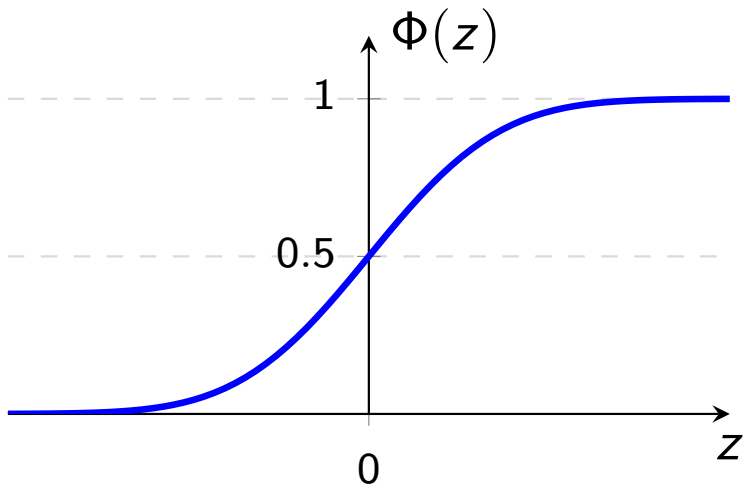




Standard normális eloszlás: eloszlásfüggvény

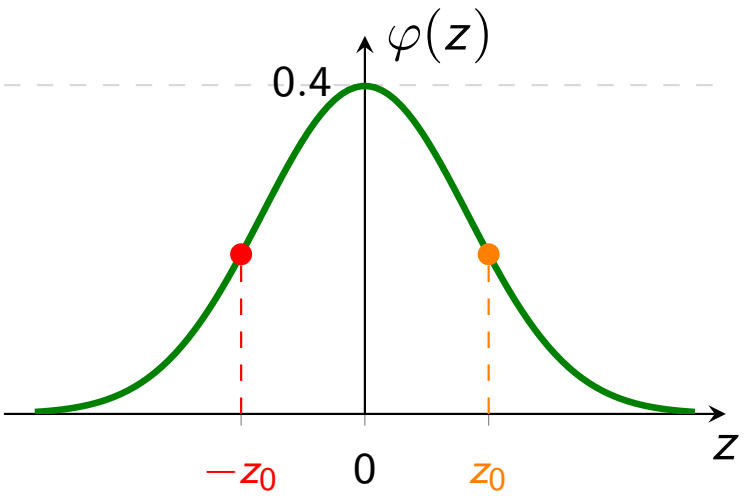
- A táblázatokban Φ értékei csak nemnegatív számokra adottak
- Negatív számokra az eloszlás szimmetriáját használhatjuk:
  - A sűrűségfüggvény szimmetrikus:

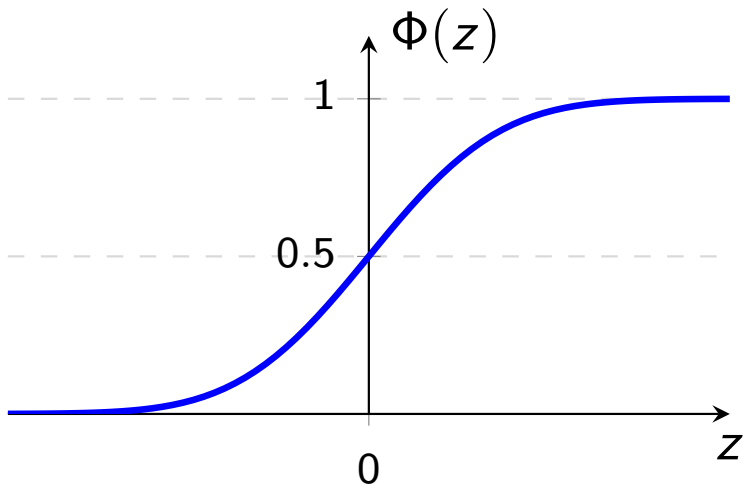




Standard normális eloszlás: eloszlásfüggvény

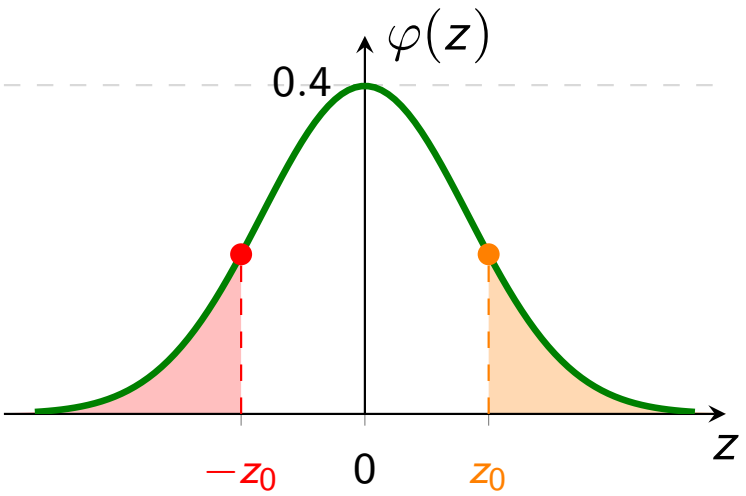
- A táblázatokban Φ értékei csak nemnegatív számokra adottak
- Negatív számokra az eloszlás szimmetriáját használhatjuk:
  - A sűrűségfüggvény szimmetrikus:
    $\varphi(-z_0) = \varphi(z_0)$ minden $z_0 \in \mathbb{R}$ esetén

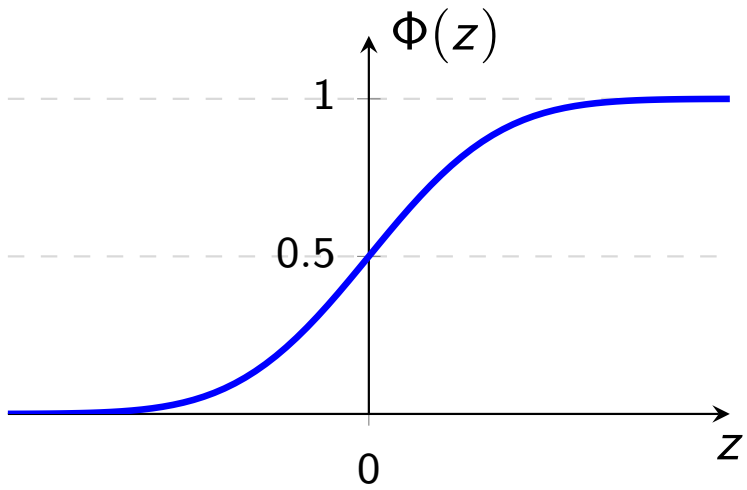




Standard normális eloszlás: eloszlásfüggvény

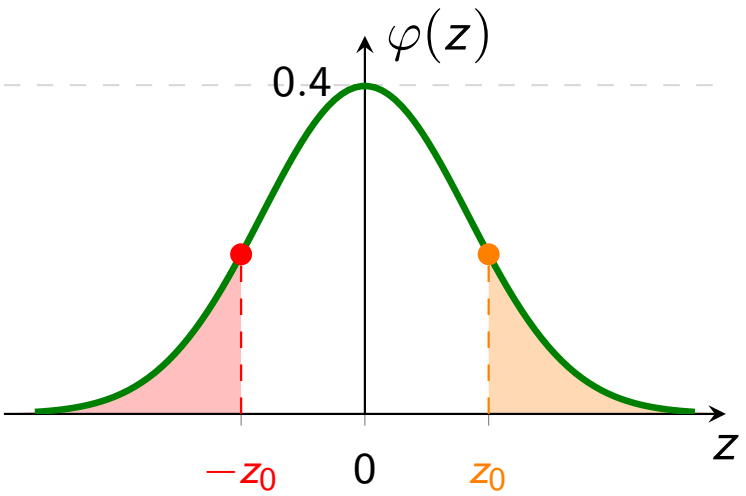
- A táblázatokban Φ értékei csak nemnegatív számokra adottak
- Negatív számokra az eloszlás szimmetriáját használhatjuk:
  - A sűrűségfüggvény szimmetrikus:
    $\varphi(-z_0) = \varphi(z_0)$ minden $z_0 \in \mathbb{R}$ esetén
  - Így a $-z_0$-től balra eső terület megegyezik a z_0-től jobbra esővel

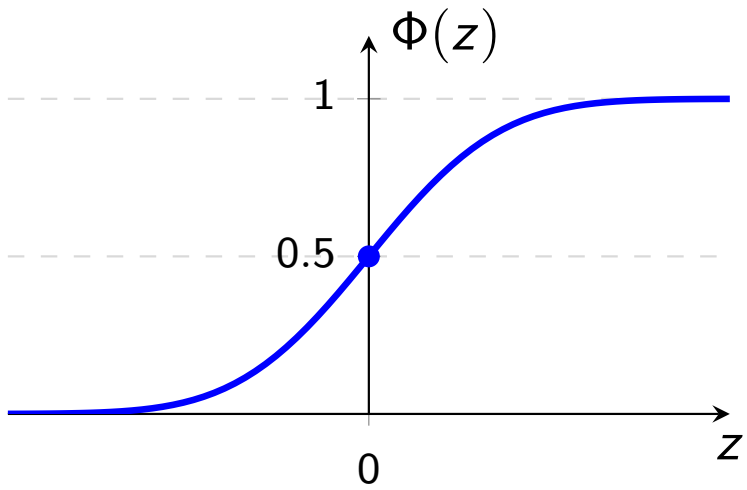




Standard normális eloszlás: eloszlásfüggvény

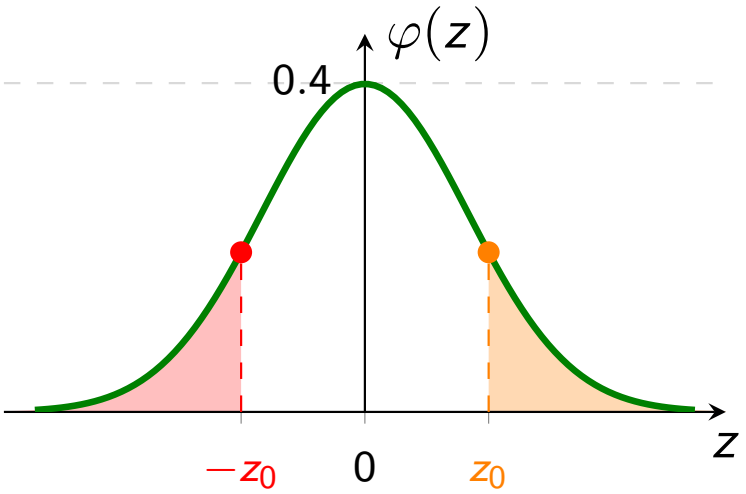
- A táblázatokban Φ értékei csak nemnegatív számokra adottak
- Negatív számokra az eloszlás szimmetriáját használhatjuk:
  - A sűrűségfüggvény szimmetrikus:
    $\varphi(-z_0) = \varphi(z_0)$ minden $z_0 \in \mathbb{R}$ esetén
  - Így a $-z_0$-től balra eső terület megegyezik a z_0-től jobbra esővel (spec. $\Phi(0) = \frac{1}{2}$)

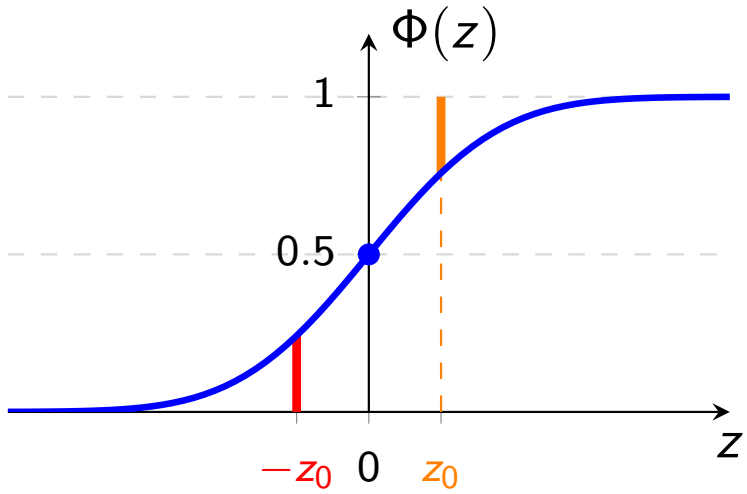




Standard normális eloszlás: eloszlásfüggvény

- A táblázatokban Φ értékei csak nemnegatív számokra adottak
- Negatív számokra az eloszlás szimmetriáját használhatjuk:
  - A sűrűségfüggvény szimmetrikus:
    $\varphi(-z_0) = \varphi(z_0)$ minden $z_0 \in \mathbb{R}$ esetén
  - Így a $-z_0$-től balra eső terület megegyezik a z_0-től jobbra esővel (spec. $\Phi(0) = \frac{1}{2}$)
  - Vagyis minden z_0-ra: $\boxed{\Phi(-z_0) = 1 - \Phi(z_0)}$





Normális eloszlás: standardizálás

- Általános normális eloszlás esetén szoftvert lehet használni

Normális eloszlás: standardizálás

- Általános normális eloszlás esetén szoftvert lehet használni
- Vagy visszavezethetjük standard normális eloszlásra

Normális eloszlás: standardizálás

- Általános normális eloszlás esetén szoftvert lehet használni
- Vagy visszavezethetjük standard normális eloszlásra:

Tétel (Standardizálás)

Ha $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, akkor $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Normális eloszlás: standardizálás

- Általános normális eloszlás esetén szoftvert lehet használni
- Vagy visszavezethetjük standard normális eloszlásra:

Tétel (Standardizálás)

Ha $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, akkor $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- A fenti Z változót nevezzük az X **standardizáltjának**

Normális eloszlás: standardizálás

- Általános normális eloszlás esetén szoftvert lehet használni
- Vagy visszavezethetjük standard normális eloszlásra:

Tétel (Standardizálás)

Ha $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, akkor $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- A fenti Z változót nevezzük az X **standardizáltjának**
- A tétel alapján $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ eloszlásfüggvénye kifejezhető Φ-vel

Normális eloszlás: standardizálás

- Általános normális eloszlás esetén szoftvert lehet használni
- Vagy visszavezethetjük standard normális eloszlásra:

Tétel (Standardizálás)

Ha $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, akkor $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- A fenti Z változót nevezzük az X **standardizáltjának**
- A tétel alapján $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ eloszlásfüggvénye kifejezhető Φ-vel:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$$

Normális eloszlás: standardizálás

- Általános normális eloszlás esetén szoftvert lehet használni
- Vagy visszavezethetjük standard normális eloszlásra:

Tétel (Standardizálás)

Ha $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, akkor $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- A fenti Z változót nevezzük az X **standardizáltjának**
- A tétel alapján $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ eloszlásfüggvénye kifejezhető Φ-vel:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Normális eloszlás: standardizálás

- Általános normális eloszlás esetén szoftvert lehet használni
- Vagy visszavezethetjük standard normális eloszlásra:

Tétel (Standardizálás)

Ha $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, akkor $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- A fenti Z változót nevezzük az X **standardizáltjának**
- A tétel alapján $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ eloszlásfüggvénye kifejezhető Φ-vel:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Normális eloszlás: standardizálás

- Általános normális eloszlás esetén szoftvert lehet használni
- Vagy visszavezethetjük standard normális eloszlásra:

Tétel (Standardizálás)

Ha $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, akkor $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- A fenti Z változót nevezzük az X **standardizáltjának**
- A tétel alapján $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ eloszlásfüggvénye kifejezhető Φ-vel:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Következmény (Intervallumvalószínűség standardizálással)

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ esetén:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Normális eloszlás: standardizálás

- Általános normális eloszlás esetén szoftvert lehet használni
- Vagy visszavezethetjük standard normális eloszlásra:

Tétel (Standardizálás)

Ha $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, akkor $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- A fenti Z változót nevezzük az X **standardizáltjának**
- A tétel alapján $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ eloszlásfüggvénye kifejezhető Φ-vel:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Következmény (Intervallumvalószínűség standardizálással)

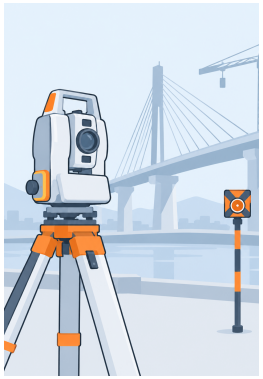
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ esetén:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással.

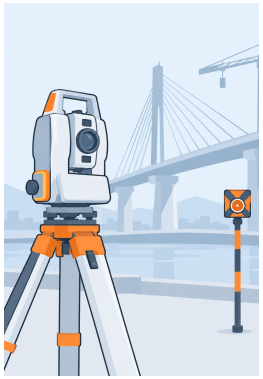


Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?



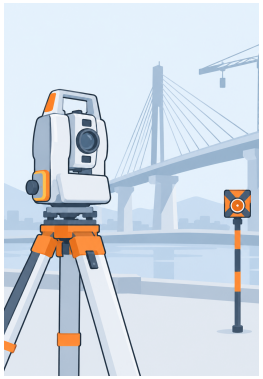
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



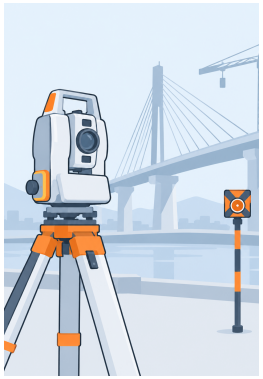
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás:

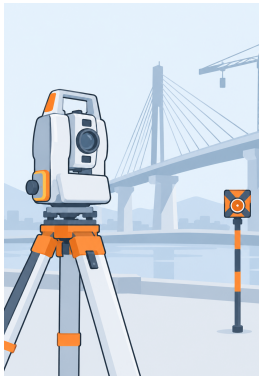
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája

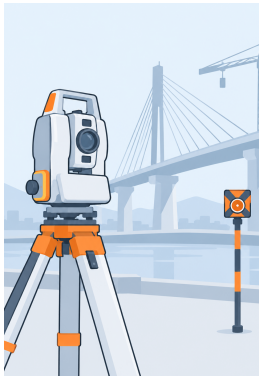
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

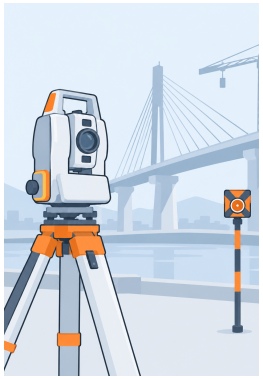
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

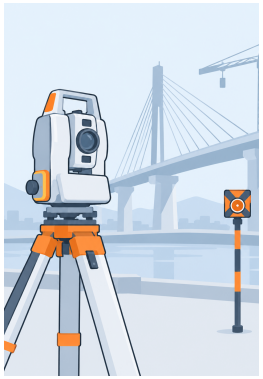
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $\mathbb{P}(-1 < X < 4)$

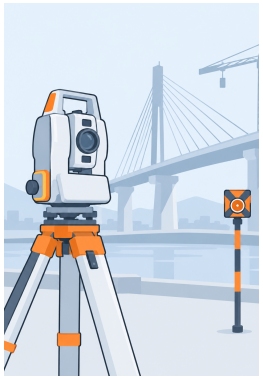
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\frac{-1-1}{2} < Z < \frac{4-1}{2}\right)$

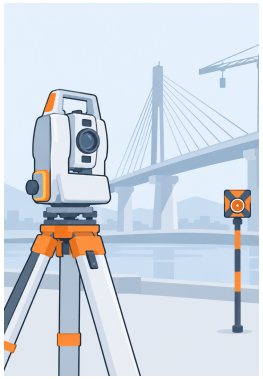
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\frac{-1-1}{2} < Z < \frac{4-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1.5)$

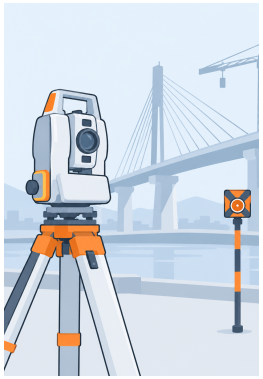
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\frac{-1-1}{2} < Z < \frac{4-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1.5)$

$= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1))$

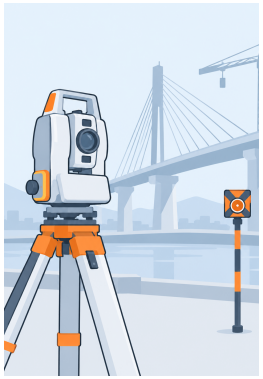
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\frac{-1-1}{2} < Z < \frac{4-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1.5)$

$= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) \approx 0.9332 - (1 - 0.8413)$

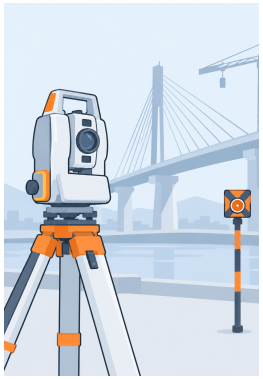
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\frac{-1-1}{2} < Z < \frac{4-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1.5)$

$= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) \approx 0.9332 - (1 - 0.8413) = 0.7745$

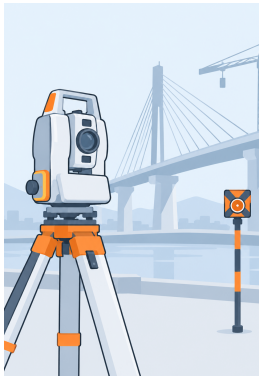
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\frac{-1-1}{2} < Z < \frac{4-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1.5)$

$= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) \approx 0.9332 - (1 - 0.8413) = 0.7745$

b) $\mathbb{P}(|X| > 3)$

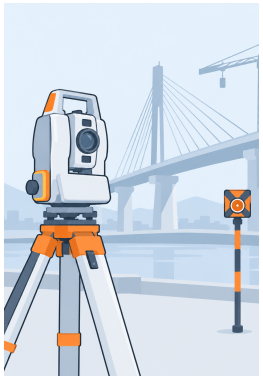
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\frac{-1-1}{2} < Z < \frac{4-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1.5)$

$= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) \approx 0.9332 - (1 - 0.8413) = 0.7745$

b) $\mathbb{P}(|X| > 3) = \mathbb{P}(X < -3) + \mathbb{P}(X > 3)$

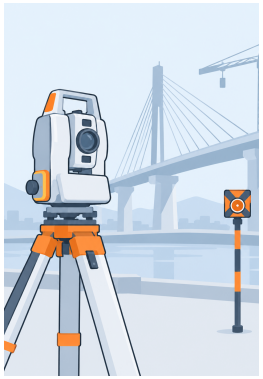
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\frac{-1-1}{2} < Z < \frac{4-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1.5)$

$= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) \approx 0.9332 - (1 - 0.8413) = 0.7745$

b) $\mathbb{P}(|X| > 3) = \mathbb{P}(X < -3) + \mathbb{P}(X > 3) = \mathbb{P}(Z < \frac{-3-1}{2}) + \mathbb{P}(Z > \frac{3-1}{2})$

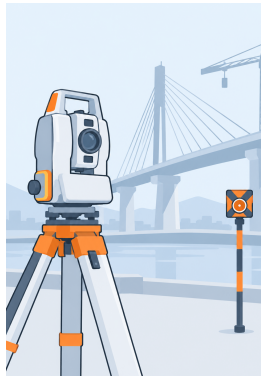
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\frac{-1-1}{2} < Z < \frac{4-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1.5)$

$= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) \approx 0.9332 - (1 - 0.8413) = 0.7745$

b) $\mathbb{P}(|X| > 3) = \mathbb{P}(X < -3) + \mathbb{P}(X > 3) = \mathbb{P}(Z < \frac{-3-1}{2}) + \mathbb{P}(Z > \frac{3-1}{2})$

$= \Phi(-2) + 1 - \Phi(1)$

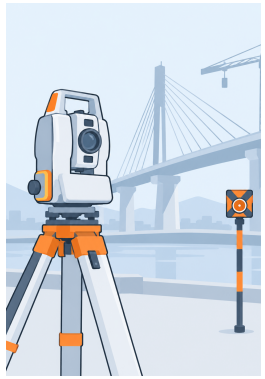
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $$\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\tfrac{-1-1}{2} < Z < \tfrac{4-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1.5)$$
$$= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) \approx 0.9332 - (1 - 0.8413) = 0.7745$$

b) $$\mathbb{P}(|X| > 3) = \mathbb{P}(X < -3) + \mathbb{P}(X > 3) = \mathbb{P}(Z < \tfrac{-3-1}{2}) + \mathbb{P}(Z > \tfrac{3-1}{2})$$
$$= \Phi(-2) + 1 - \Phi(1) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(1)$$

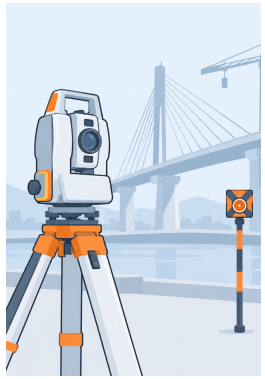
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $$\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\tfrac{-1-1}{2} < Z < \tfrac{4-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1.5)$$
$$= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) \approx 0.9332 - (1 - 0.8413) = 0.7745$$

b) $$\mathbb{P}(|X| > 3) = \mathbb{P}(X < -3) + \mathbb{P}(X > 3) = \mathbb{P}(Z < \tfrac{-3-1}{2}) + \mathbb{P}(Z > \tfrac{3-1}{2})$$
$$= \Phi(-2) + 1 - \Phi(1) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(1)$$
$$\approx 1 - 0.9772 + 1 - 0.8413$$

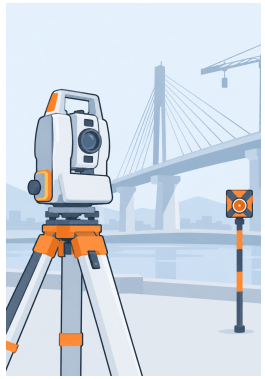
Normális eloszlás: példa

Feladat (Geodéziai mérés hibája)

Egy távolságmérés hibája normális eloszlást követ 1 mm várható értékkel és 2 mm szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a hiba -1 mm és 4 mm közé esik?

b) az abszolút hiba meghaladja a 3 mm-t?



Megoldás: Legyen X a mérés előjeles hibája $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$

Ekkor X standardizáltja: $Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, így

a) $$\mathbb{P}(-1 < X < 4) = \mathbb{P}\left(\tfrac{-1-1}{2} < Z < \tfrac{4-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1.5)$$
$$= \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) \approx 0.9332 - (1 - 0.8413) = 0.7745$$

b) $$\mathbb{P}(|X| > 3) = \mathbb{P}(X < -3) + \mathbb{P}(X > 3) = \mathbb{P}(Z < \tfrac{-3-1}{2}) + \mathbb{P}(Z > \tfrac{3-1}{2})$$
$$= \Phi(-2) + 1 - \Phi(1) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(1)$$
$$\approx 1 - 0.9772 + 1 - 0.8413 = 0.1815$$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Folytonos valószínűségi változók

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Folytonos valószínűségi változók:
   - Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Folytonos valószínűségi változók:
   - Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Folytonos valószínűségi változók:
   - Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
   - Várható érték: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Folytonos valószínűségi változók:
   - Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
   - Várható érték: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Szórásnégyzet: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Folytonos valószínűségi változók:
   - Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
   - Várható érték: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Szórásnégyzet: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
2. Nevezetes folytonos eloszlások

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Folytonos valószínűségi változók:
   - Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
   - Várható érték: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Szórásnégyzet: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
2. Nevezetes folytonos eloszlások:

	$f(x)$	$F(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
UNI(a, b)				

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Folytonos valószínűségi változók:
   - Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
   - Várható érték: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Szórásnégyzet: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
2. Nevezetes folytonos eloszlások:

	$f(x)$	$F(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
UNI(a, b)				
EXP(λ)				

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Folytonos valószínűségi változók:
   - Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
   - Várható érték: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Szórásnégyzet: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
2. Nevezetes folytonos eloszlások:

	$f(x)$	$F(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
UNI(a, b)				
EXP(λ)				
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$				

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Folytonos valószínűségi változók:
   - Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
   - Várható érték: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Szórásnégyzet: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
2. Nevezetes folytonos eloszlások:

	$f(x)$	$F(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
UNI$(a,\, b)$	$\frac{1}{b-a}$, ha $x \in [a, b]$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
EXP(λ)	$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, ha $x \geqslant 0$	$1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(\mu,\, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2

Összefoglalás

Mit tanultunk ma?

1. Folytonos valószínűségi változók:
   - Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
   - Várható érték: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
   - Szórásnégyzet: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
2. Nevezetes folytonos eloszlások:

	$f(x)$	$F(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
UNI$(a,\, b)$	$\frac{1}{b-a}$, ha $x \in [a, b]$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
EXP(λ)	$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, ha $x \geqslant 0$	$1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(\mu,\, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2

Köszönöm a figyelmet!