

Matematika A3 építőmérnököknek 1. gyakorlat

Szeparábilis és elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

Tudnivalók:

- Gyakorlatvezető: Szőke Márton
- Elérhetőségek: Teams: szoke.martonpeter@edu.bme.hu, email: szokemp@math.bme.hu
- Feladatsorok megoldásokkal a honlapon (math.bme.hu/~szokemp/matek_a3) és a tárgy Teams csoportjában
- Követelmények: 2 db 42 pontos ZH, amiken külön-külön 30%-ot kell elérni, 2 db 8 pontos HF, összesítve 40%-ot kell elérni

Szeparábilis differenciálegyenletek

Szétválasztható (vagy szeparábilis) differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad (1)$$

ahol $g(y) \neq 0$. Ekkor az egyenlet általános megoldását az alábbi egyenlet megoldásából kaphatjuk:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx. \quad (2)$$

Ha $g(y_0) = 0$ valamilyen y_0 -ra, akkor az (1) egyenletnek a konstans $y(x) \equiv y_0$ függvény is megoldása.

1. feladat Adjuk meg az $y' = \frac{y}{x}$ differenciálegyenlet általános és egy partikuláris megoldását!

2. feladat Adjuk meg az $y' = e^{x+y}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

3. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y' = \frac{e^x}{y+1}, \quad y(0) = -4$$

4. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y' = y^2 \sin(x), \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

5. feladat Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{y-2}{xy} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

Oldjuk meg a kezdetiérték-problémákat az alábbi esetekben:

$$(a) y(1) = 2 \quad (b) y(1) = 3 \quad (c) y(-1) = -3$$

6. feladat A rádium bomlása során a sugárzó anyag $y(t)$ mennyisége arányos az anyag csökkenésének gyorsaságával. Tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1600 év. A kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik el 100 év alatt?

Segítség: $-y' = Ay$, ahol A az arányossági tényező és $y(1600) = \frac{1}{2}y(0)$.

Homogén fokszerű egyenlet

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3)$$

alakú egyenlet $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel $u' = \frac{f(u)-u}{x}$ alakra hozható, ami szétválasztható differenciálegyenlet. Ezt megoldva megkapjuk u -t, ahonnan $y(x) = x \cdot u(x)$.

7. feladat Adjuk meg az $x + y - xy' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Segítség: alkalmazzuk az $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ helyettesítést.

8. feladat Adjuk meg az $xe^{\frac{y}{x}} + y = xy'$ differenciálegyenlet általános megoldását!

9. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$x^2y' + xy = x^2 + y^2, \quad y(1) = 2$$

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \quad (4)$$

ahol p, q ismert, folytonos függvények. A (4) egyenlet általános megoldását **konstans variációs módszerrel** tudjuk megtalálni. Ez két lépésből áll:

1. **Homogén** rész általános megoldása:

$y' + p(x) \cdot y = 0$ átrendezés után ($y' = -p(x) \cdot y$) szétválasztható egyenletként megoldható. Legyen y_h ennek a homogén egyenletnek az általános megoldása.

2. **Inhomogén** egyenlet partikuláris megoldása:

Ha a homogén rész általános megoldása $y_h = F(c, x)$, akkor az (4) egyenletnek egy y_p partikuláris megoldását megkaphatjuk $y_p = F(c(x), x)$ alakban. Ezt behelyettesítve (4) egyenletbe, megkapjuk $c'(x)$ függvényt. Innen $c(x)$ integrálással meghatározható, ebből pedig y_p is.

Ekkor az inhomogén egyenlet általános megoldása $y = y_h + y_p$.

10. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' - y = e^{-x} \quad (5)$$

11. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$xy' = \cos x - 2y \quad (6)$$

12. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$$

13. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$$

14. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását $t > 0$ esetén!

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

15. feladat Adjuk meg az $y' - 2y = t^2e^{2t}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

16. feladat Adjuk meg az $e^x(y' + y) = 1$ differenciálegyenlet általános megoldását!

17. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y' - \frac{2}{x}y = x, \quad y(1) = 3$$

18. feladat Adjuk meg az $y' - 3x^2y = 6x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását!

19. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (x \neq 0)$$