

Matematika A3 építőmérnököknek 1. gyakorlat

Szeparábilis és elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

Tudnivalók:

- Gyakorlatvezető: Szóke Márton
- Elérhetőségek: Teams: szoke.martonpeter@edu.bme.hu, email: szokemp@math.bme.hu
- Feladatsorok megoldásokkal a honlapon (math.bme.hu/~szokemp/matek_a3) és a tárgy Teams csoportjában
- Követelmények: 2 db 42 pontos ZH, amiken külön-külön 30%-ot kell elérni, 2 db 8 pontos HF, összesítve 40%-ot kell elérni

Szeparábilis differenciálegyenletek

Szétválasztható (vagy szeparábilis) differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad (1)$$

ahol $g(y) \neq 0$. Ekkor az egyenlet általános megoldását az alábbi egyenlet megoldásából kaphatjuk:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx. \quad (2)$$

Ha $g(y_0) = 0$ valamilyen y_0 -ra, akkor az (1) egyenletnek a konstans $y(x) \equiv y_0$ függvény is megoldása.

1. feladat Adjuk meg az $y' = \frac{y}{x}$ differenciálegyenlet általános és egy partikuláris megoldását!

Megoldásvázlat Ez az egyenlet szétválasztható egyenlet: (1) egyenlet jelöléseivel most $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = y$. A (2) integrálegyenletből $\ln |y| = \ln |x| + c_1$ adódik, ahol c_1 tetszőleges konstans, vagyis $y(x) = c_2 \cdot x$ valamilyen c_2 konstansra, ez a differenciálegyenlet általános megoldása.

Partikuláris megoldást úgy kapunk, ha rögzítünk egy c_2 -t az általános megoldásban, pl. $c_2 = 1$ esetén adódó partikuláris megoldás: $y(x) = x$.

2. feladat Adjuk meg az $y' = e^{x+y}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldásvázlat $y' = e^x \cdot e^y$ szétválasztható egyenlet, aminek általános megoldására a (2) egyenletből az adódik, hogy $-e^{-y} = e^x + c$, vagyis $y(x) = -\ln(-e^x + c)$.

3. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y' = \frac{e^x}{y+1}, \quad y(0) = -4$$

Megoldásvázlat Az általános megoldás ((2) alapján):

$$\frac{1}{2}y^2 + y = e^x + c. \quad (3)$$

A kezdetiérték-probléma megoldását úgy kapjuk, hogy $x = 0$ esetén tudjuk, hogy $y = -4$, így ezeket a (3) egyenletbe behelyettesítve $c = 3$. Tehát a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$\frac{1}{2}y(x)^2 + y(x) = 3 + e^x. \quad (4)$$

Megjegyzés: Ebből $y(x)$ kifejezhető, de nem szükséges. Előfordulnak olyan differenciálegyenletek is, ahol nem is lehet kifejezni $y(x)$ -et, csak implicit képlet adható rá (mint (4)).

4. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y' = y^2 \sin(x), \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

Megoldásvázlat Az általános megoldás:

$$-\frac{1}{y} = -\cos x + c,$$

ahol a kezdeti értékből $c = -1$. Tehát $y(x) = \frac{1}{\cos x + 1}$.

5. feladat Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{y-2}{xy} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

Oldjuk meg a kezdetiérték-problémákat az alábbi esetekben:

(a) $y(1) = 2$ (b) $y(1) = 3$ (c) $y(-1) = -3$

Megoldásvázlat

(a) Az (1) egyenletben $g(y) = \frac{y-2}{y}$, így $g(2) = 0$. Tehát az $y(1) = 2$ kezdeti feltétel esetén konstans megoldást kapunk: $y(x) \equiv 2$.

(b) A (2) egyenlet bal oldalán az $\frac{y}{y-2} = 1 + \frac{2}{y-2}$ függvényt integráljuk, aminek primitív függvénye $y + 2 \ln(y-2)$. Tehát ekkor az általános megoldás

$$y + 2 \ln(y-2) = \ln x + c. \quad (5)$$

Az $y(1) = 3$ kezdeti feltételből $c = 3$ adódik, azaz $y(x) + 2 \ln(y(x)-2) = \ln x + 3$.

(c) Az előzőhöz hasonlóan oldjuk meg ezt is, de az előjelekre jobban kell figyelni. Integrálás után igazából $y + 2 \ln|y-2| = \ln|x| + c$ adódik. A megadott kezdeti értékből látjuk, hogy most $x < 0$ és $y-2 < 0$, vagyis $y + 2 \ln(2-y) = \ln(-x) + c$. Behelyettesítve az $y(-1) = -3$ feltételt, $c = -3 + 2 \ln(5)$, azaz a megoldás implicit alakban: $y(x) + 2 \ln(2-y(x)) = \ln(-x) - 3 + 2 \ln(5)$.

6. feladat A rádium bomlása során a sugárzó anyag $y(t)$ mennyisége arányos az anyag csökkenésének gyorsaságával. Tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1600 év. A kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik el 100 év alatt?

Segítség: $-y' = Ay$, ahol A az arányossági tényező és $y(1600) = \frac{1}{2}y(0)$.

Megoldásvázlat A $-y' = Ay$ differenciálegyenlet általános megoldása $-\ln y = At + c$.

Csak a lebomlott anyag arányára vagyunk kíváncsiak, így feltehetjük, hogy $y(0) = 1$ (azaz a feltételünk $y(1600) = \frac{1}{2}$). Ha az $y(0) = 1$ feltételt behelyettesítjük az általános megoldásba, megkapjuk, hogy $c = 0$. Az $y(1600) = \frac{1}{2}$ feltételből az is kijön, hogy $A = \frac{\ln 2}{1600}$. Tehát $-\ln(y(t)) = \frac{\ln 2}{1600} \cdot t$. Ebből $-\ln(y(100)) = \frac{\ln 2}{16} \approx 0.043$, azaz $y(100) \approx 0.958$. Tehát a kiindulási anyag mennyiségének körülbelül 4.2%-a bomlik le 100 év alatt.

Homogén fokszerű egyenlet

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6)$$

alakú egyenlet $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel $u' = \frac{f(u)-u}{x}$ alakra hozható, ami szétválasztható differenciálegyenlet. Ezt megoldva megkapjuk u -t, ahonnan $y(x) = x \cdot u(x)$.

7. feladat Adjuk meg az $x + y - xy' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Segítség: alkalmazzuk az $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ helyettesítést.

Megoldásvázlat Átalakítás után az egyenlet $y' = 1 + \frac{y}{x}$, azaz $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ az $f(u) = 1 + u$ függvényre. Így a behelyettesítés után $u(x)$ -re kapott differenciálegyenlet

$$u' = \frac{1}{x}.$$

Ez egy szétválasztható egyenlet, aminek általános megoldása $u(x) = \ln|x| + c$, amiből

$$y(x) = x \cdot u(x) = x \cdot \ln|x| + cx.$$

8. feladat Adjuk meg az $xe^{\frac{y}{x}} + y = xy'$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldásvázlat Az előzőhöz hasonló típusú, de most $f(u) = e^u + u$, így $u' = \frac{e^u}{x}$, ahonnan

$$u(x) = -\ln(-\ln|x| - c), \quad \text{így} \quad y(x) = -x \ln(-\ln|x| - c).$$

9. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$x^2 y' + xy = x^2 + y^2, \quad y(1) = 2$$

Megoldásvázlat Átalakítás után látszódik, hogy ez az egyenlet is az előzőhöz hasonló típusú, most $f(u) = 1 + u^2 - u$. Az $u' = \frac{1+u^2-2u}{x}$ egyenletet megoldva átrendezés után $u(x) = 1 - \frac{1}{\ln x + c}$, így az általános megoldás $y(x) = x - \frac{x}{\ln x + c}$.

A kezdeti feltételből $c = -1$, vagyis $y(x) = x - \frac{x}{\ln x - 1}$.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \quad (7)$$

ahol p, q ismert, folytonos függvények. A (7) egyenlet általános megoldását **konstans variációs módszerrel** tudjuk megtalálni. Ez két lépésből áll:

1. **Homogén** rész általános megoldása:

$y' + p(x) \cdot y = 0$ átrendezés után ($y' = -p(x) \cdot y$) szétválasztható egyenletként megoldható. Legyen y_h ennek a homogén egyenletnek az általános megoldása.

2. **Inhomogén** egyenlet partikuláris megoldása:

Ha a homogén rész általános megoldása $y_h = F(c, x)$, akkor az (7) egyenletnek egy y_p partikuláris megoldását megkaphatjuk $y_p = F(c(x), x)$ alakban. Ezt behelyettesítve (7) egyenletbe, megkapjuk $c'(x)$ függvényt. Innen $c(x)$ integrálással meghatározható, ebből pedig y_p is.

Ekkor az inhomogén egyenlet általános megoldása $y = y_h + y_p$.

10. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' - y = e^{-x} \quad (8)$$

Megoldásvázlat Az egyenlet (7) alakú $p(x) = -1$ és $q(x) = e^{-x}$ függvényekkel. Így konstans variációs módszerrel meg tudjuk oldani:

1. A homogén egyenlet $y' - y = 0$, vagyis átrendezés után az $y' = y$ szétválasztható egyenletet kapjuk. Ennek az általános megoldása a korábban tanultak alapján $y_h = c \cdot e^x$.

2. A (8) inhomogén egyenlet partikuláris megoldását így $y_p = c(x) \cdot e^x$ alakban keressük (y_h -ban a tetszőlegesen választható konstans c -t lecseréltük egy ismeretlen $c(x)$ függvényre). Ezt az y_p -t visszahelyettesítjük (8) egyenletbe. Szorzatderiválási szabály szerint $y_p' = c'(x)e^x + c(x)e^x$, vagyis (8) egyenletbe helyettesítésből:

$$(c'(x)e^x + c(x)e^x) - c(x)e^x = e^{-x},$$

azaz $c'(x) = e^{-2x}$. Integrálás után $c(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ adódik, azaz $y_p = c(x) \cdot e^x = -\frac{1}{2}e^{-x}$.

Tehát a (8) inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y(x) = y_h + y_p = c \cdot e^x - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

11. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$xy' = \cos x - 2y \quad (9)$$

Megoldásvázlat

1. A homogén rész átrendezés után: $y' = -\frac{2}{x} \cdot y$. Ez szétválasztható, amiből $y_h = c \cdot x^{-2}$.

2. A partikuláris megoldást $y_p = c(x) \cdot x^{-2}$ alakban keressük. Visszahelyettesítve (9) egyenletbe

$$c'(x) = x \cdot \cos x.$$

Ebből parciális integrálással $c(x) = x \cdot \sin x + \cos x$.

Vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h + y_p = \frac{c}{x^2} + (x \cdot \sin x + \cos x) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

12. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$$

Megoldásvázlat A homogén rész általános megoldása $y_h = cx$. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p = c(x) \cdot x$ alakban keresve $c(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln|x|$ adódik, így

$$y(x) = cx + \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x \ln|x|.$$

13. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$$

Megoldásvázlat Előzőekhez hasonló jelöléssel $y_h = ce^t$, $y_p = c(t)e^t = 2e^{2t}(t-1)$, ahol $c(t)$ függvényt visszahelyettesítés után parciális integrálással tudtuk kiszámolni. Vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(t) = ce^t + 2e^{2t}(t-1).$$

A kezdeti feltételből $c = 3$ jön ki. Tehát a kezdetiérték-probléma megoldása

$$y(t) = 3e^t + 2e^{2t}(t-1).$$

14. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását $t > 0$ esetén!

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

Megoldásvázlat $y_h = ct^{-2}$, $y_p = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right) \cdot t^{-2} = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2}$

$y(t) = ct^{-2} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2}$ általános megoldásba a kezdeti feltételt behelyettesítve $c = \frac{1}{12}$, vagyis a keresett függvény

$$y(t) = \frac{t^{-2}}{12} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2}.$$

15. feladat Adjuk meg az $y' - 2y = t^2 e^{2t}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldásvázlat $y_h = ce^{2t}$, $y_p = \frac{t^3 \cdot e^{2t}}{3}$, azaz

$$y(t) = ce^{2t} + \frac{t^3 \cdot e^{2t}}{3}.$$

16. feladat Adjuk meg az $e^x (y' + y) = 1$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldásvázlat

$$y(x) = ce^{-x} + xe^{-x}$$

17. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y' - \frac{2}{x}y = x, \quad y(1) = 3$$

Megoldásvázlat Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = cx^2 + \ln x \cdot x^2.$$

A kezdeti feltételből $c = 3$, így a keresett függvény

$$y(x) = (3 + \ln x) \cdot x^2.$$

18. feladat Adjuk meg az $y' - 3x^2y = 6x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldásvázlat Ezt az egyenletet már kétféleképpen is meg tudjuk oldani:

- Lineáris egyenletként: $y_h = ce^{x^3}$, $y_p = \left(-2e^{-x^3}\right) \cdot e^{x^3} = -2$, így $y(x) = ce^{x^3} - 2$.
- Szétválaszthatóként:

$$y' = 3x^2(2 + y)$$

egy szétválasztható egyenlet, aminek a megoldása korábban tanultak alapján $\ln|2 + y| = x^3 + c$, azaz $y(x) = ce^{x^3} - 2$ (épp mint a másik módszerrel).

19. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (x \neq 0)$$

Megoldásvázlat $y_h = cx^{-2}$, $y_p = (x - \arctan x) \cdot x^{-2}$, így $y(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{\arctan x}{x^2}$.