

Matematika A3 építőmérnököknek 2. gyakorlat

Autonóm és egzakt differenciálegyenletek

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek (ismétlés)

1. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$$

Autonóm differenciálegyenletek, stabilitás

Az autonóm differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(y). \quad (1)$$

Az **egyensúlyi helyzetek** (vagy kritikus pontok) az $f(y) = 0$ egyenlet megoldásai.

Az egyensúlyi helyzeteket osztályozhatjuk stabilitás szempontjából. Ehhez $f(y)$ előjelét kell megvizsgálni. Az y_0 egyensúlyi helyzet

- **stabil**, ha y_0 -tól balra f pozitív, y_0 -tól jobbra negatív,
- **instabil**, ha y_0 -tól balra f negatív, y_0 -tól jobbra pozitív,
- **félig stabil** egyébként.

Ezután az (1) differenciálegyenlet megoldásai vázlatosan ábrázolhatók. Egyrészt az egyensúlyi helyzetek adják az egyenlet konstans megoldásait. Másrészt az ezek közötti megoldásgörbék monotonitása leolvasható f előjeléből.

Megjegyzés: Ahol $f(y) \neq 0$, ott (1) egy szétválasztható differenciálegyenlet, így az analitikus megoldás is megadható.

2. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezzük azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázoljuk a megoldásokat!

$$y' = 3 - y$$

3. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezzük azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázoljuk a megoldásokat!

$$y' = y(y - 1)(y - 2)$$

4. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezzük azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázoljuk a megoldásokat!

$$y' = y(e^y - 1)$$

5. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezzük azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázoljuk a megoldásokat!

$$y' = (e^{y+1} - 1)(y - 2)^3$$

6. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezzük azokat stabilitás szempontjából, továbbá vázlatosan ábrázoljuk is a megoldásokat!

$$y' = (2 - y) \ln y$$

7. feladat Tekintsük az $y' = y^3 - y^2$ differenciálegyenletet! Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket és ezek típusát! Rajzoljunk le néhány jellemző megoldásgörbét! Adjuk meg az analitikus megoldást is!

Egzakt differenciálegyenletek

Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \quad (2)$$

Ez pontosan akkor **egzakt**, ha M , N parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, illetve

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (3)$$

Ekkor létezik $F(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ potenciálfüggvény, amire $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Ezt az $F(x, y)$ függvényt integrálással tudjuk meghatározni:

Az $M(x, y)$ függvényt integráljuk x szerint. Ekkor még F -ben van egy ismeretlen, csak y -től függő $c(y)$ rész, amit $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ azonosságból tudunk meghatározni. (Hasonlóan működik, ha $N(x, y)$ -t integráljuk y szerint, majd a csak x -től függő részt a $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ egyenletből számoljuk ki.)

Ekkor (2) általános megoldása $F(x, y) = c$, ahol c tetszőleges konstans.

Megjegyzés: A (2)-beli felírás ekvivalens az $M(x, y) + N(x, y) \cdot y' = 0$ alakkal.

8. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$x dy + y dx = 0 \quad (4)$$

9. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$(2x - 3y) dy + (2y - 3x) dx = 0$$

10. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$e^y dx + (xe^y + 2y) dy = 0$$

11. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$2x(\sin(y) + 1) + x^2 \cos(y) y' = 0$$

12. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$2x \cos(y) + (2y \cos(y) - (x^2 + y^2) \sin(y)) y' = 0$$

13. feladat Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{\frac{y^3}{x^4} + y}{\frac{y^2}{x^3} - x}$$