

Matematika A3 építőmérnököknek 2. gyakorlat Autonóm és egzakt differenciálegyenletek

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek (ismétlés)

1. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$$

Megoldásvázlat A homogén rész általános megoldása $y_h = cx$. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p = c(x) \cdot x$ alakban keresve $c(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln|x|$ adódik, így

$$y(x) = cx + \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x \ln|x|.$$

Autonóm differenciálegyenletek, stabilitás

Az autonóm differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = f(y). \quad (1)$$

Az **egyensúlyi helyzetek** (vagy kritikus pontok) az $f(y) = 0$ egyenlet megoldásai.

Az egyensúlyi helyzeteket osztályozhatjuk stabilitás szempontjából. Ehhez $f(y)$ előjelét kell megvizsgálni. Az y_0 egyensúlyi helyzet

- **stabil**, ha y_0 -tól balra f pozitív, y_0 -tól jobbra negatív,
- **instabil**, ha y_0 -tól balra f negatív, y_0 -tól jobbra pozitív,
- **félig stabil** egyébként.

Ezután az (1) differenciálegyenlet megoldásai vázlatosan ábrázolhatók. Egyrészt az egyensúlyi helyzetek adják az egyenlet konstans megoldásait. Másrészt az ezek közötti megoldásgörbék monotonitása leolvasható f előjeléből.

Megjegyzés: Ahol $f(y) \neq 0$, ott (1) egy szétválasztható differenciálegyenlet, így az analitikus megoldás is megadható.

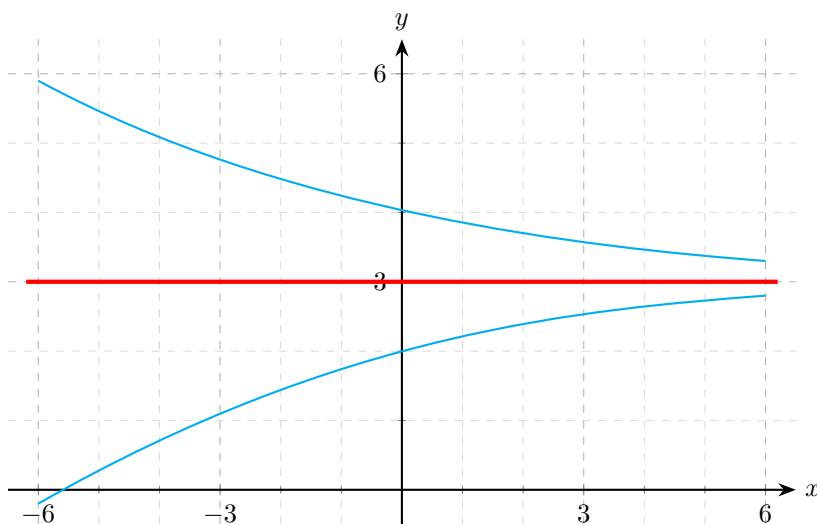
2. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezzük azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázoljuk a megoldásokat!

$$y' = 3 - y$$

Megoldásvázlat Most $f(y) = 3 - y$, aminek az egyetlen gyöke a 3, így az egyetlen egyensúlyi helyzet $y = 3$. Mivel $f(y) > 0$ esetén pozitív és $y > 3$ esetén negatív, így ez egy stabil egyensúlyi helyzet.

A vázlatos megoldásgörbék:

- az $y = 3$ egyensúlyi helyzetben konstans megoldásgörbét kapunk (az 1. ábrán pirossal),
- $y > 3$ esetén $f(y) < 0$, így itt csökkenő megoldásgörbék vannak, amik rásimulnak az egyensúlyi megoldásra (ezek közül egy látható az 1. ábrán késsel, a konstans megoldás felett),
- $y < 3$ esetén $f(y) > 0$, így itt növekvő megoldásgörbék vannak, amik szintén rásimulnak az egyensúlyi megoldásra (ezek közül is egy látható az 1. ábrán késsel, a konstans megoldás alatt).



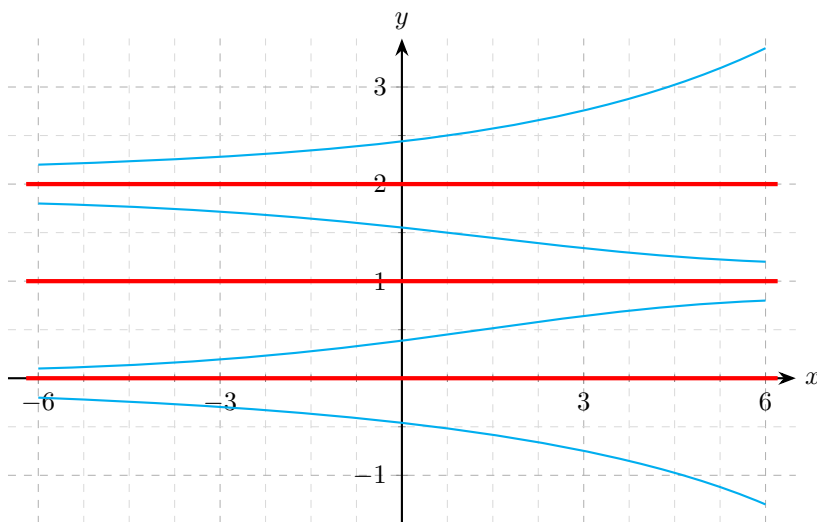
1. ábra. Az $y' = 3 - y$ differenciálegyenlet vázlatos megoldásgörbéi

3. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezzük azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázoljuk a megoldásokat!

$$y' = y(y - 1)(y - 2)$$

Megoldásvázlat A differenciálegyenlet jobb oldalán lévő $f(y) = y(y - 1)(y - 2)$ függvény gyökei 0, 1 és 2. Az f függvény pozitív $0 < y < 1$ és $2 < y$ esetén és negatív $y < 0$ és $1 < y < 2$ esetén, így a 0 és a 2 instabil, az 1 stabil egyensúlyi helyzet.

A 2. ábrán pirossal láthatók a konstans megoldásgörbék és késsel egy-egy megoldásgörbe a köztes intervallumokból.



2. ábra. Az $y' = y(y - 1)(y - 2)$ differenciálegyenlet vázlatos megoldásgörbéi

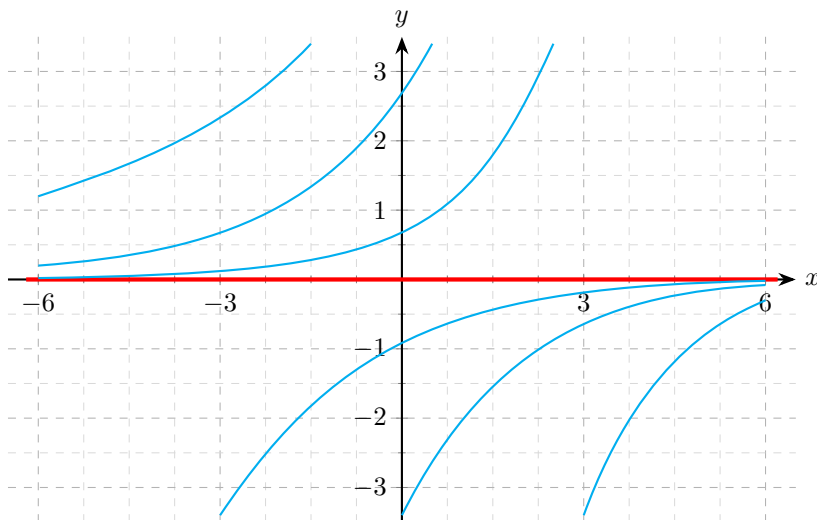
Megjegyzés: Ahogy az ábrákon is látszódik, a nem konstans megoldásgörbék ∞ -ben és $-\infty$ -ben is mindig vagy rásimulnak egy konstans megoldásra vagy elszállnak ∞ -be (ez csak a legnagyobb egyensúlyi helyzet felett lehetséges) vagy $-\infty$ -be (csak legkisebb egyensúlyi helyzet alatt).

Egy egyensúlyi helyzet pontosan akkor stabil, ha $+\infty$ -ben felülről és alulról is rásimulnak a megoldásgörbék és pontosan akkor instabil, ha mindkét irányban eltávolódnak tőle a megoldásgörbék $+\infty$ -ben.

4. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezzük azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázoljuk a megoldásokat!

$$y' = y(e^y - 1)$$

Megoldásvázlat Az egyetlen egyensúlyi helyzet $y = 0$, ami félig stabil. Ez ad egy konstans megoldásgörbét. A többi megoldásgörbe monoton nő. Lásd a 3. ábrán.

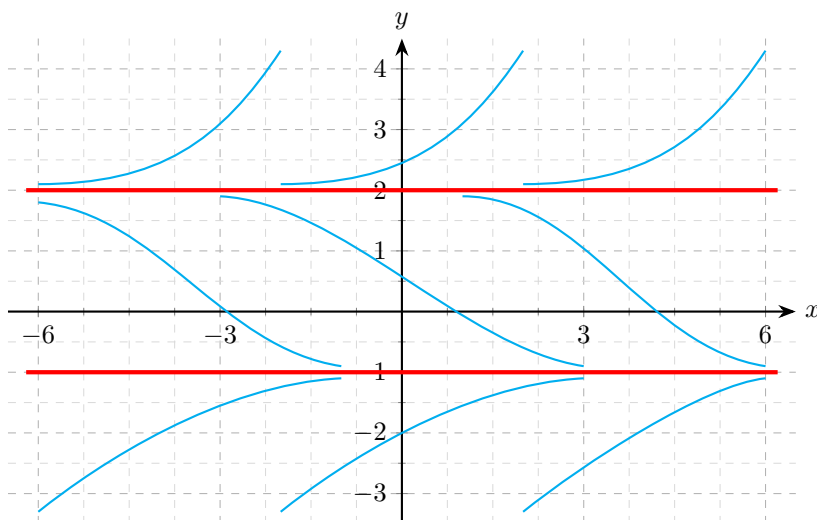


3. ábra. Az $y' = y(e^y - 1)$ differenciálegyenlet vázlatos megoldásgörbéi

5. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezzük azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázoljuk a megoldásokat!

$$y' = (e^{y+1} - 1)(y - 2)^3$$

Megoldásvázlat Két egyensúlyi helyzet van: a -1 stabil, a 2 instabil. A nem konstans megoldásgörbék monoton nőnek $y < -1$ és $y > 2$ esetén, míg monoton csökkennek $-1 < y < 2$ esetén. Lásd a 4. ábrán.



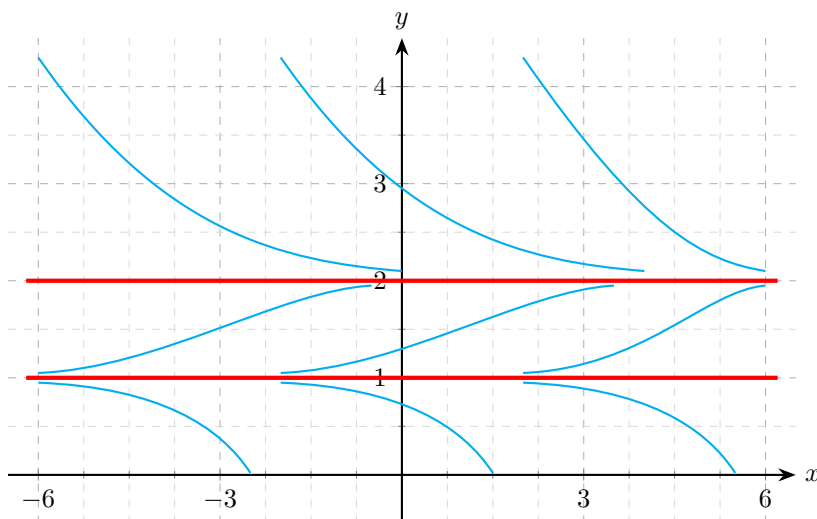
4. ábra. Az $y' = (e^{y+1} - 1)(y - 2)^3$ differenciálegyenlet vázlatos megoldásgörbéi

6. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezzük azokat stabilitás szempontjából, továbbá vázlatosan ábrázoljuk is a megoldásokat!

$$y' = (2 - y) \ln y$$

Megoldásvázlat A jobb oldalon lévő $f(y) = (2 - y) \ln y$ függvény gyökei $y = 1$ és $y = 2$. Mivel f csak az $(1, 2)$ nyílt intervallumon pozitív, így az $y = 1$ instabil, $y = 2$ pedig stabil.

Ennek megfelelően a megoldásgörbék: $y = 1$ -ben és $y = 2$ -ben konstans, $y > 2$ és $0 < y < 1$ esetén csökkenőek, $1 < y < 2$ esetén pedig növekvőek ($y < 0$ esetén $\ln y$ nem értelmezett). Az ábránál arra kell még figyelni, hogy amikor y közelít 0-hoz, akkor a differenciálegyenletből látható, hogy y' nem 0-hoz tart (vagyis a görbék nem rásimulnak a vízszintes tengelyre), hanem $-\infty$ -hez tart, vagyis függőleges mennek neki a vízszintes tengelynek. Lásd az 5. ábrán.



5. ábra. Az $y' = (2 - y) \ln y$ differenciálegyenlet vázlatos megoldásgörbéi

7. feladat Tekintsük az $y' = y^3 - y^2$ differenciálegyenletet! Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket és ezek típusát! Rajzoljunk le néhány jellemző megoldásgörbét! Adjuk meg az analitikus megoldást is!

Megoldásvázlat Az egyensúlyi helyzetek $y = 0$ és $y = 1$. Ebből $y = 0$ félig stabil, $y = 1$ instabil. A megoldásgörbék egyensúlyi helyzetben konstansok, $y < 0$ és $0 < y < 1$ esetén csökkenőek, $1 < y$ esetén növekvőek. Lásd a 6. ábrán.

Az egyenlet az egyensúlyi helyzeteken kívül szétválaszthatóként megoldható. Az integrálás törtekre bontás segítségével végezhető el:

$$\frac{1}{y^3 - y^2} = \frac{1}{y^2(y - 1)} = \frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}.$$

Ebből az általános megoldás például $y > 1$ esetén:

$$\ln(y - 1) - \ln(y) + \frac{1}{y} = x + c.$$

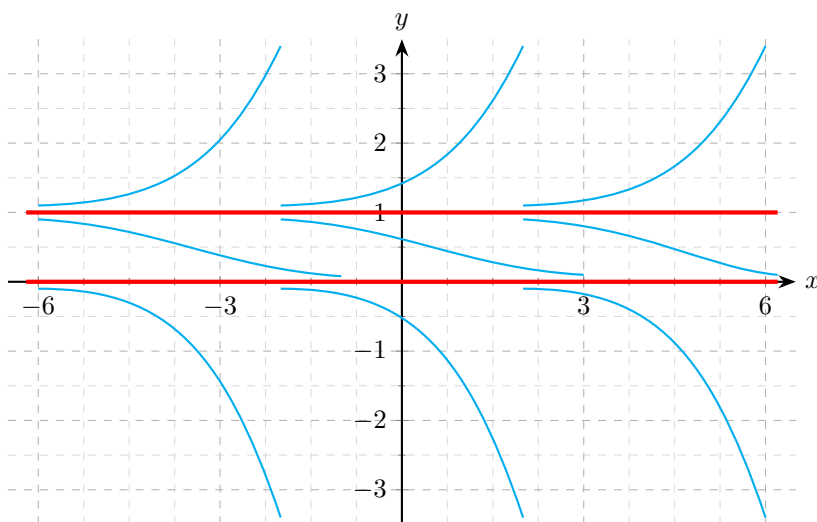
Egzakt differenciálegyenletek

Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \quad (2)$$

Ez pontosan akkor **egzakt**, ha M , N parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, illetve

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (3)$$



6. ábra. Az $y' = y^3 - y^2$ differenciálegyenlet vázlatos megoldásgörbéi

Ekkor létezik $F(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ potenciálfüggvény, amire $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Ezt az $F(x, y)$ függvényt integrálással tudjuk meghatározni:

Az $M(x, y)$ függvényt integráljuk x szerint. Ekkor még F -ben van egy ismeretlen, csak y -től függő $c(y)$ rész, amit $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ azonosságból tudunk meghatározni. (Hasonlóan működik, ha $N(x, y)$ -t integráljuk y szerint, majd a csak x -től függő részt a $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ egyenletből számoljuk ki.)

Ekkor (2) általános megoldása $F(x, y) = c$, ahol c tetszőleges konstans.

Megjegyzés: A (2)-beli felírás ekvivalens az $M(x, y) + N(x, y) \cdot y' = 0$ alakkal.

8. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$x \, dy + y \, dx = 0 \quad (4)$$

Megoldásvázlat A (4) egyenlet (2) alakú $M(x, y) = y$, $N(x, y) = x$ függvényekkel. A (3) feltétel teljesül, hiszen

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1.$$

Tehát (4) egzakt, így az általános megoldáshoz az $F(x, y)$ potenciálfüggvényt kell kiszámolni. Tudjuk, hogy $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, így $M(x, y)$ x szerinti integrálásából azt kapjuk, hogy $F(x, y) = xy + c(y)$, ahol $c(y)$ egy csak y -től függő tag. Azt is tudjuk, hogy $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, így az $F(x, y) = xy + c(y)$ függvényt y szerint deriválva $N(x, y) = x$ függvényt kell kapnunk. Az $xy + c(y)$ függvénynek az y szerinti deriváltja $x + c'(y)$, vagyis most $c'(y) = 0$, így $c(y) = 0$ választható.

Tehát $F(x, y) = xy$ és így (4) általános megoldása: $xy = c$, ahol c tetszőlegesen választható konstans.

9. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$(2x - 3y) \, dy + (2y - 3x) \, dx = 0$$

Megoldásvázlat Most $M(x, y) = 2y - 3x$, $N(x, y) = 2x - 3y$. A (3) most is teljesül, így ez is egy egzakt differenciálegyenlet. A $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ azonosságból tudjuk, hogy $F(x, y) = 2xy - \frac{3}{2}x^2 + c(y)$ alakú. Ezután $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ -ből kapjuk, hogy $c'(y) = -3y$, azaz $c(y) = -\frac{3}{2}y^2$ választható.

Tehát $F(x, y) = 2xy - \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$ és az általános megoldás $2xy - \frac{3}{2}(x^2 + y^2) = c$.

10. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$e^y dx + (xe^y + 2y) dy = 0$$

Megoldásvázlat Most $M(x, y) = e^y$, $N(x, y) = xe^y + 2y$, így $\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}$. Ekkor a potenciál-függvény:

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx = xe^y + c(y),$$

ahol $c(y)$ tetszőleges függvény. Másrészt $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ -ből tudjuk, hogy

$$xe^y + c'(y) = xe^y + 2y, \quad \text{azaz (az integrálási konstans 0-nak választva)} \quad c(y) = y^2.$$

Így az egyenlet általános megoldása $xe^y + y^2 = c$.

11. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$2x(\sin(y) + 1) + x^2 \cos(y)y' = 0$$

Megoldásvázlat Ellenőrizhető, hogy az egyenlet egzakt. A potenciálfüggvény $F(x, y) = x^2(1 + \sin y)$, így az általános megoldás $x^2(1 + \sin y) = c$.

12. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$2x \cos(y) + (2y \cos(y) - (x^2 + y^2) \sin(y)) y' = 0$$

Megoldásvázlat Ez is egzakt, az általános megoldás: $(x^2 + y^2) \cdot \cos y = c$.

13. feladat Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \frac{\frac{y^3}{x^4} + y}{\frac{y^2}{x^3} - x}$$

Megoldásvázlat Átrendezés után:

$$-\left(\frac{y^3}{x^4} + y\right) dx + \left(\frac{y^2}{x^3} - x\right) dy = 0,$$

vagyis $M(x, y) = -\frac{y^3}{x^4} - y$ és $N(x, y) = \frac{y^2}{x^3} - x$. Ekkor $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{3y^2}{x^4} - 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$, így az egyenlet egzakt. A hozzátartozó potenciálfüggvény $F(x, y) = \frac{y^3}{3x^3} - xy$, így az általános megoldás $\frac{y^3}{3x^3} - xy = c$.