

Matematika A3 építőmérnököknek 3. gyakorlat

Állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad (1)$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $g(t)$ ismert folytonos függvény. A megoldás menete két lépésből áll:

1. az $ay'' + by' + cy = 0$ homogén egyenlet y_h általános megoldásának meghatározása,
2. az (1) egyenlet egy y_p partikuláris megoldásának meghatározása.

Ezek után (1) általános megoldása: $y = y_h + y_p$.

Homogén rész megoldása

Tekintsük az alábbi homogén egyenletet:

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (2)$$

A megoldásának lépései:

1. felírjuk a karakterisztikus egyenletet: $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$,
2. megkeressük a karakterisztikus egyenlet gyökeit: r_1, r_2 ,
3. meghatározzuk az általános megoldást:
 - (i) Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 \neq r_2$, akkor $y_h = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$,
 - (ii) Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 = r_2$, akkor $y_h = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$,
 - (iii) Ha $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$ és $r_1 = u + iv$ (azaz $r_2 = u - iv$), akkor $y_h = c_1 e^{ut} \cos(vt) + c_2 e^{ut} \sin(vt)$.

1. feladat Adjuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását!

- (a) $y'' - 2y' + y = 0$
- (b) $y'' - 2y' - y = 0$
- (c) $2y'' - 6y' + 5y = 0$

2. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémák megoldását!

- (a) $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$
- (b) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

Próbafüggvény-módszer

Az (1) egyenlet egy y_p partikuláris megoldását szeretnénk meghatározni. Ehhez akkor tudjuk használni a próbafüggvény-módszert, ha

$$g(t) = e^{ut} \cdot (A_n(t) \cos(vt) + B_m(t) \cdot \sin(vt))$$

alakú valamilyen $u, v \in \mathbb{R}$ -re és A_n, B_m n -ed, illetve m -edfokú polinomra, azaz

$$A_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0,$$
$$B_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0$$

alakúak adott $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ együtthatókra.

Legyen $s \in \{0, 1, 2\}$ az $u + iv$ komplex szám multiplicitása a homogén részhez tartozó karakterisztikus egyenletben. Ekkor a partikuláris megoldást

$$y_p = t^s \cdot e^{ut} \cdot (P_k(t) \cdot \cos(vt) + Q_k(t) \cdot \sin(vt))$$

alakban keressük, ahol $k = \max(n, m)$, P_k, Q_k pedig k -adfokú polinomok, azaz

$$P_k(t) = p_k t^k + p_{k-1} t^{k-1} + \dots + p_1 t + p_0,$$
$$Q_k(t) = q_k t^k + q_{k-1} t^{k-1} + \dots + q_1 t + q_0,$$

ahol az ismeretlen együtthatók az (1) egyenletbe való visszahelyettesítésből adódnak.

3. feladat Adott $g(t)$ esetén milyen alakban keressük a partikuláris megoldást? (Tegyük fel, hogy $s = 0$ a példákban!)

(a) $g(t) = 1 + t^2$

(b) $g(t) = e^{3t}(1 - t)$

(c) $g(t) = e^{-2t} \cdot \sin(4t)$

(d) $g(t) = e^t \cdot (\cos(2t) + (1 + t^3) \cdot \sin(2t))$

4. feladat Tekintsük az $y'' + y' - 2y = 0$ homogén differenciálegyenletet!

(a) Adjuk meg az egyenlet általános megoldását!

(b) Adjuk meg az $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ kezdeti értékekhez tartozó megoldást!

(c) Adjuk meg a következő inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}$$

5. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$$

6. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$$

7. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 2y' + 5y = 2e^t \sin(2t)$$

8. feladat Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin t$$

9. feladat

(a) Oldjuk meg az $y'' + 4y = 3 \sin x$ differenciálegyenletet!

(b) Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' + 4y = x^2 + 3x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

10. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$