

Matematika A3 építőmérnököknek 3. gyakorlat

Állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad (1)$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $g(t)$ ismert folytonos függvény. A megoldás menete két lépésből áll:

1. az $ay'' + by' + cy = 0$ homogén egyenlet y_h általános megoldásának meghatározása,
2. az (1) egyenlet egy y_p partikuláris megoldásának meghatározása.

Ezek után (1) általános megoldása: $y = y_h + y_p$.

Homogén rész megoldása

Tekintsük az alábbi homogén egyenletet:

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (2)$$

A megoldásának lépései:

1. felírjuk a karakterisztikus egyenletet: $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$,
2. megkeressük a karakterisztikus egyenlet gyökei: r_1, r_2 ,
3. meghatározzuk az általános megoldást:
 - (i) Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 \neq r_2$, akkor $y_h = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$,
 - (ii) Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 = r_2$, akkor $y_h = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$,
 - (iii) Ha $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$ és $r_1 = u + iv$ (azaz $r_2 = u - iv$), akkor $y_h = c_1 e^{ut} \cos(vt) + c_2 e^{ut} \sin(vt)$.

1. feladat Adjuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását!

- (a) $y'' - 2y' + y = 0$
- (b) $y'' - 2y' - y = 0$
- (c) $2y'' - 6y' + 5y = 0$

Megoldásvázlat

- (a) A karakterisztikus egyenlet $r^2 - 2r + 1 = 0$, így a gyökök $r_1 = r_2 = 1$. Ez tehát (ii) eset, így $y_h = c_1 e^t + c_2 t e^t$.
- (b) A karakterisztikus egyenlet $r^2 - 2r - 1 = 0$, aminek a gyökei $r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $r_2 = 1 - \sqrt{2}$. Ez a fenti (i) eset, így az általános megoldás $y_h = c_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{2})t}$.
- (c) A karakterisztikus egyenlet gyökei $\frac{3 \pm i}{2}$, ez (iii) eset $u = \frac{3}{2}$, $v = \frac{1}{2}$ értékekkel, így az általános megoldás: $y_h = c_1 e^{\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + c_2 e^{\frac{3}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$.

2. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémák megoldását!

(a) $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$

(b) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

Megoldásvázlat

(a) A karakterisztikus egyenlet $r^2 - 4 = 0$, így a gyökök $r_1 = 2, r_2 = -2$. Ez tehát (i) eset, így $y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$.

Az $y(0) = 3$ kezdeti értéket behelyettesítve az általános megoldásba $3 = c_1 + c_2$ adódik. Az $y'(0) = 2$ kezdeti értékhez előbb deriváljuk y_h függvényt: $y'_h = 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t}$. Ebbe behelyettesítve az $y'(0) = 2$ feltételt $2 = 2c_1 - 2c_2$ adódik.

Tehát kaptunk c_1 -re és c_2 -re egy egyenletrendszert:

$$3 = c_1 + c_2$$

$$2 = 2c_1 - 2c_2.$$

Ennek a megoldása $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, azaz a kezdetiérték-probléma megoldása $y = 2e^{2t} + e^{-2t}$.

(b) Az egyenlet általános megoldása: $y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$. A kezdeti értékekből $c_1 = \frac{5}{3}$, $c_2 = \frac{1}{3}$ és így a keresett megoldás: $y = \frac{5}{3} e^{2t} + \frac{1}{3} e^{-t}$.

Próbafüggvény-módszer

Az (1) egyenlet egy y_p partikuláris megoldását szeretnénk meghatározni. Ehhez akkor tudjuk használni a próbafüggvény-módszert, ha

$$g(t) = e^{ut} \cdot (A_n(t) \cos(vt) + B_m(t) \cdot \sin(vt))$$

alakú valamilyen $u, v \in \mathbb{R}$ -re és A_n, B_m n -ed, illetve m -edfokú polinomra, azaz

$$A_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0,$$

$$B_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0$$

alakúak adott $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ együtthatókra.

Legyen $s \in \{0, 1, 2\}$ az $u + iv$ komplex szám multiplicitása a homogén részhez tartozó karakterisztikus egyenletben. Ekkor a partikuláris megoldást

$$y_p = t^s \cdot e^{ut} \cdot (P_k(t) \cdot \cos(vt) + Q_k(t) \cdot \sin(vt))$$

alakban keressük, ahol $k = \max(n, m)$, P_k, Q_k pedig k -adfokú polinomok, azaz

$$P_k(t) = p_k t^k + p_{k-1} t^{k-1} + \dots + p_1 t + p_0,$$

$$Q_k(t) = q_k t^k + q_{k-1} t^{k-1} + \dots + q_1 t + q_0,$$

ahol az ismeretlen együtthatók az (1) egyenletbe való visszahelyettesítésből adódnak.

3. feladat Adott $g(t)$ esetén milyen alakban keressük a partikuláris megoldást? (Tegyük fel, hogy $s = 0$ a példákban!)

(a) $g(t) = 1 + t^2$

(b) $g(t) = e^{3t}(1 - t)$

(c) $g(t) = e^{-2t} \cdot \sin(4t)$

(d) $g(t) = e^t \cdot (\cos(2t) + (1 + t^3) \cdot \sin(2t))$

Megoldásvázlat

(a) $u = 0$, $v = 0$, $A_n(t) = 1 + t^2$, $B_m(t) \equiv 0$, így $k = \max(2, 0) = 2$, tehát $y_p = p_2 t^2 + p_1 t + p_0$.

(b) $u = 3, v = 0, A_n(t) = 1 - t, B_m(t) \equiv 0$, így $k = \max(1, 0) = 1$, tehát $y_p = e^{3t} \cdot (p_1 t + p_0)$.

(c) $u = -2, v = 4, A_n(t) = 0, B_m(t) \equiv 1$, így $k = \max(0, 0) = 0$, tehát

$$y_p = e^{-2t} \cdot (p_0 \cos(4t) + q_0 \sin(4t)).$$

(d) $u = 1, v = 2, A_n(t) = 1, B_m(t) = 1 + t^3$, így $k = \max(0, 3) = 3$, tehát

$$y_p = e^t \cdot ((p_3 t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0) \cos(2t) + (q_3 t^3 + q_2 t^2 + q_1 t + q_0) \sin(2t)).$$

4. feladat Tekintsük az $y'' + y' - 2y = 0$ homogén differenciálegyenletet!

(a) Adjuk meg az egyenlet általános megoldását!

(b) Adjuk meg az $y(0) = 0, y'(0) = 3$ kezdeti értékekhez tartozó megoldást!

(c) Adjuk meg a következő inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}$$

Megoldásvázlat

(a) A karakterisztikus egyenlet: $r^2 + r - 2 = 0$. Ennek gyökei 1 és -2. Ez a homogén egyenleteknél látott (i) eset, így $y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$.

(b) A kezdeti értékeket a kapott általános megoldásba behelyettesítve ezeket az egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2, \\ 3 &= c_1 - 2c_2. \end{aligned}$$

Ebből $c_1 = 1, c_2 = -1$, így $y = e^t - e^{-2t}$.

(c) Láttuk, hogy a homogén rész általános megoldása $y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$.

Próbafüggvény-módszerrel: $g(t) = e^{-t}$ és -1 nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek (azaz $s = 0$), így a próbafüggvény: $y_p = p_0 e^{-t}$.

Egyenletbe visszahelyettesítésből $p_0 = -\frac{1}{2}$.

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása: $y = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-t}$.

5. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$$

Megoldásvázlat A homogén egyenlet általános megoldása $y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$.

Most $g(t) = -3e^{-t}$, azaz $u + iv = -1$, ami egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, így $s = 1$. Tehát a partikuláris megoldást

$$y_p = t \cdot (p_1 t e^{-t} + p_0 e^{-t}) = p_1 t^2 e^{-t} + p_0 t e^{-t}$$

alakban keressük. Ezt kétszer deriválva, majd az inhomogén egyenletbe visszahelyettesítve az adódik, hogy

$$-8p_1 t e^{-t} + (2p_1 - 4p_0) e^{-t} = -3t e^{-t}.$$

Vagyis (a $t e^{-t}$ tagok együtthatóiból) $-8p_1 = -3$ és (az e^{-t} együtthatójából) $2p_1 - 4p_0 = 0$. Ennek a megoldása: $p_1 = \frac{3}{8}, p_0 = \frac{3}{16}$.

Így az inhomogén egyenlet általános megoldása $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{3}{8} t^2 e^{-t} + \frac{3}{16} t e^{-t}$.

6. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$$

Megoldásvázlat A karakterisztikus egyenletnek -1 kétszeres gyöke, így $y_h = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$.

Most $g(t) = 2e^{-t}$, így $u + iv = -1$, ami kétszeres gyök volt. Tehát $s = 2$ és a partikuláris megoldást $y_p = p_0 \cdot t^2 e^{-t}$ alakban keressük. Ezt kétszer deriválva, majd az inhomogén egyenletbe visszahelyettesítve $p_0 = 1$ adódik.

Vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása: $y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + t^2 e^{-t}$.

7. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 2y' + 5y = 2e^t \sin(2t)$$

Megoldásvázlat A homogén egyenlet általános megoldása $y_h = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)$.

A $g(t) = 2e^t \sin(2t)$ -ből leolvasható, hogy $u + iv = 1 + 2i$. Ez egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, azaz $s = 1$. Így az általános megoldást $y_p = p_0 t e^t \cos(2t) + q_0 t e^t \sin(2t)$ alakban keressük. Ekkor

$$y'_p = p_0 e^t \cos(2t) + q_0 e^t \sin(2t) + (p_0 + 2q_0) t e^t \cos(2t) + (q_0 - 2p_0) t e^t \sin(2t),$$

$$y''_p = (2p_0 + 4q_0) e^t \cos(2t) + (2q_0 - 4p_0) e^t \sin(2t) + (4q_0 - 3p_0) t e^t \cos(2t) + (-4p_0 - 3q_0) t e^t \sin(2t).$$

Ezeket az inhomogén egyenletbe visszahelyettesítve a $t e^t \cos(2t)$ tagok és a $t e^t \sin(2t)$ tagok kiesnek, az $e^t \cos(2t)$ tagokból $q_0 = 0$ jön ki, míg az $e^t \sin(2t)$ tagok együtthatóiból $p_0 = -\frac{1}{2}$.

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása: $y = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t) - \frac{1}{2} t e^t \cos(2t)$.

8. feladat Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin t$$

Megoldásvázlat Az $y'' + 2y' + 5y = 0$ homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet gyökei: $r_1 = -1 + 2i$, $r_2 = -1 - 2i$, így az általános megoldása $y_h = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t)$.

Az inhomogén rész $g(t) = e^{-t} \sin t$, így próbafüggvény-módszer használva az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $y_p = p_0 e^{-t} \cos t + q_0 e^{-t} \sin t$ alakban keressük ($s = 0$).

Az y_p függvényt kétszer deriválva, majd az inhomogén egyenletbe visszahelyettesítve az $e^{-t} \cos t$ együtthatóiból $3p_0 = 0$, így $p_0 = 0$. Másrészt $e^{-t} \sin t$ együtthatóiból $3q_0 = 1$, így $q_0 = \frac{1}{3}$. Így egy partikuláris megoldás: $y_p = \frac{1}{3} e^{-t} \sin t$.

Ebből az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t) + \frac{1}{3} e^{-t} \sin t.$$

9. feladat

(a) Oldjuk meg az $y'' + 4y = 3 \sin x$ differenciálegyenletet!

(b) Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' + 4y = x^2 + 3x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

Megoldásvázlat

(a) A karakterisztikus egyenlet $r^2 + 4 = 0$. A gyökök: $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$. Így a homogén rész általános megoldása $y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását próbafüggvény-módszerrel keressük: $g(x) = 3 \sin x$ és i nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek (azaz $s = 0$), így a próbafüggvény:

$$y_p = p_0 \cos x + q_0 \sin x.$$

Visszahelyettesítés után a $\sin x$ -es tagok együtthatóiból $q_0 = 1$, míg a $\cos x$ -es tagokból $p_0 = 0$.

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \sin x$.

(b) A homogén rész általános megoldása most is $y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p = p_2 x^2 + p_1 x + p_0$ alakban keressük. Ezt kétszer deriválva és az eredeti egyenletbe helyettesítve a $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{3}{4}$ és $p_0 = -\frac{1}{8}$ együtthatók adódnak. Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}.$$

Az $y(0) = 0$ feltételből $c_1 = \frac{1}{8}$. Az $y'(0) = 2$ egyenletből $c_2 = \frac{5}{8}$. Tehát a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$y = \frac{1}{8} \cos(2x) + \frac{5}{8} \sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}.$$

10. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Megoldásvázlat A karakterisztikus egyenlet gyökei 1 és 2, így a homogén rész általános megoldása $y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$.

Az inhomogén rész $g(t) = 2e^t$. Mivel 1 gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért most $s = 1$, azaz a partikuláris megoldást $y_p = p_0 t e^t$ alakban keressük. Ezt kétszer deriválva, majd visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe az e^t együtthatóiból $p_0 = -2$. Így $y_p = -2te^t$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - 2te^t.$$

A kezdeti értékekből

$$1 = c_1 + c_2,$$

$$2 = c_1 + 2c_2 - 2.$$

Így $c_1 = -2$, $c_2 = 3$ és $y = -2e^t + 3e^{2t} - 2te^t$.